Úlohy domácí části I. kola kategorie B

1. *V reálném oboru uvažujme soustavu rovnic*

$$x^4 + y^2 = \left(a + \frac{1}{a}\right)^3,$$
$$x^4 - y^2 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^3$$

s nenulovým reálným parametrem a.

a) *Najděte všechny hodnoty* a, *pro které má uvedená soustava řešení.*

b) *Dokažte, že pro libovolné řešení* (x, y) *této soustavy platí* $x^2 + |y| \geqq 4$. *Kdy v této nerovnosti nastane rovnost?* (Ján Mazák)

Řešení. Soustavu řešíme jako lineární soustavu rovnic s neznámými x^4 a y^2. Sečtením obou rovnic a vydělením dvěma dostaneme

$$x^4 = \frac{1}{2}\left(\left(a + \frac{1}{a}\right)^3 + \left(a - \frac{1}{a}\right)^3\right) = a^3 + \frac{3}{a}. \tag{1}$$

Podobně odečtením druhé rovnice od první a vydělením dvěma dostaneme

$$y^2 = \frac{1}{2}\left(\left(a + \frac{1}{a}\right)^3 - \left(a - \frac{1}{a}\right)^3\right) = 3a + \frac{1}{a^3}. \tag{2}$$

a) Jestliže daná soustava rovnic má řešení v oboru reálných čísel, nutně $y^2 \geqq 0$. Ze vztahu (2) vidíme, že musí být $a > 0$. Naopak, je-li $a > 0$, jsou obě pravé strany rovnic (1) a (2) kladné, a jejich odmocněním tak najdeme reálná čísla x a y, která jsou řešením jak soustavy (1) $\wedge$ (2), tak i s ní ekvivalentní původní soustavy rovnic.

b) Pro kladné reálné číslo a podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem dvou kladných čísel x^2 a $|y|$ a díky rovnostem (1) a (2) platí

$$x^2 + |y| \geqq 2\sqrt{x^2|y|} = 2\sqrt[4]{x^4y^2} = 2\sqrt[4]{\left(a^3 + \frac{3}{a}\right)\left(3a + \frac{1}{a^3}\right)} = 2\sqrt[4]{3\left(a^4 + \frac{1}{a^4}\right) + 10}.$$

Podle téže nerovnosti mezi průměry kladných reálných čísel a^4 a $1/a^4$ dále platí

$$a^4 + \frac{1}{a^4} \geqq 2\sqrt{a^4 \cdot \frac{1}{a^4}} = 2.$$

Dohromady dostáváme

$$x^2 + |y| \geqq 2\sqrt[4]{3\left(a^4 + \frac{1}{a^4}\right) + 10} \geqq 2\sqrt[4]{16} = 4,$$

což jsme měli dokázat.

Dva průměry (aritmetický a geometrický), na které jsme se odvolali (dokonce dvakrát), se obecně rovnají jen v situaci, kdy se rovnají obě průměrované hodnoty (viz návodnou úlohu N3).

Rovnost v dokázané nerovnosti nastane, právě když $x^2 = |y|$ a současně $a^4 = 1/a^4$. Z druhé rovnosti s ohledem na $a > 0$ dostáváme $a = 1$, což dosazeno do (1) a (2) dává $x^4 = 4$ a $y^2 = 4$, je tedy splněna i první rovnost $x^2 = |y| = 2$. Rovnost v dokázané nerovnosti tudíž nastane, právě když $a = 1$.

Poznámka. Pokud řešitelé znají i nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem čtyř nezáporných čísel, mohou část b) dokázat následovně. Platí

$$x^4 = a^3 + \frac{3}{a} = a^3 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \geqq 4\sqrt[4]{a^3 \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a}} = 4,$$

přičemž rovnost zde nastane, právě když $a = 1$. Podobně se dokáže i nerovnost

$$y^2 = 3a + \frac{1}{a^3} \geqq 4$$

opět s dodatkem, že rovnost nastane, právě když $a = 1$. Potom již snadno dostaneme

$$x^2 + |y| = \sqrt{x^4} + \sqrt{y^2} \geqq \sqrt{4} + \sqrt{4} = 4.$$

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Pro které hodnoty reálného parametru a má soustava rovnic

$$x^2 + y^2 = a,$$
$$2x^2 + y^2 = a^2$$

řešení v oboru reálných čísel? [Řešíme jako lineární soustavu rovnic s neznámými x^2, y^2, dostaneme $x^2 = a^2 - a = a(a-1)$, $y^2 = 2a - a^2 = a(2-a)$. Z $x^2 \geqq 0$ dostaneme $a \in \mathbb{R} \setminus (0;1)$, z $y^2 \geqq 0$ máme $a \in \langle 0;2\rangle$, obě podmínky splňují $a \in \{0\} \cup \langle 1;2\rangle$.]

N2. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x + y - z = 2a,$$
$$x - y + z = 2b,$$
$$-x + y + z = 2c.$$

s reálnými parametry a, b, c [$x = a + b$, $y = a + c$, $z = b + c$.]

N3. Pro nezáporná reálná čísla a, b platí tzv. nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (AG-nerovnost)

$$\sqrt{ab} \leqq \frac{a+b}{2}.$$

Dokažte. Kdy nastane rovnost? [Nerovnost upravíme na $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqq 0$, která zřejmě platí. Rovnost nastane jen v případě $a = b$.]

N4. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b, c, d platí

$$(ab + cd)\Big(\frac{1}{ac} + \frac{1}{bd}\Big) \geqq 4.$$

[Roznásobíme výraz na levé straně a využijeme nerovnost $x + 1/x \geqq 2$ (platnou $\forall x > 0$) pro $x = a/d$ a pro $x = b/c$.]

D1. Pro libovolná čísla a, b z intervalu $\langle 1, +\infty)$ platí nerovnost

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1) - (a - 1)^2(b - 1)^2 \geqq 4.$$

Dokažte a zjistěte, kdy nastane rovnost. [59–C–II–2]

D2. Najděte všechna reálná čísla x a y, pro něž výraz $2x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 4$ nabývá své nejmenší hodnoty. [65–C–I–3, část a)]

D3. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b platí

$$\sqrt{ab} \leqq \frac{2(a^2 + 3ab + b^2)}{5(a+b)} \leqq \frac{a+b}{2},$$

a pro každou z obou nerovností zjistěte, kdy přechází v rovnost. [59–C–I–5]

D4. Najděte nejmenší možnou hodnotu výrazu

$$3x^2 - 12xy + y^4,$$

ve kterém x a y jsou libovolná celá nezáporná čísla. [65–C–II–1]

D5. Určete nejmenší hodnotu výrazu

$$V = x^2 + \frac{2}{1+2x^2},$$

kde x je libovolné reálné číslo. Pro která x výraz V této hodnoty nabývá? [64–B–II–2]

D6. Určete všechny dvojice (x, y) reálných čísel, které vyhovují nerovnici

$$(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geqq \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2.$$

[63–B–I–2]

D7. Určete všechna reálná čísla p taková, že pro libovolná kladná čísla x, y platí nerovnost

$$\frac{x^3 + py^3}{x+y} \geqq xy.$$

[50–B–II–1]

D8. Najděte všechny možné hodnoty součtu $x + y$, kde reálná čísla x, y splňují rovnost $x^3 + y^3 = 3xy$. [48–B–I–6]

2. *Přirozené číslo n má aspoň 73 dvojmístných dělitelů. Dokažte, že jedním z nich je číslo 60. Uveďte rovněž příklad čísla n, které má právě 73 dvojmístných dělitelů, včetně náležitého zdůvodnění.* (Josef Tkadlec)

Řešení. Jelikož $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, stačí v první části dokázat, že přirozené číslo n je současně dělitelné navzájem nesoudělnými čísly 3, 4 a 5. K tomu pro každé z těchto čísel stačí ukázat, že je jím dělitelný alespoň jeden dvojmístný dělitel čísla n.

Dvojmístných čísel je celkem 90. Mezi nimi jsou dělitelná pěti čísla $10 = 2 \cdot 5$, $15 = 3 \cdot 5, \ldots, 95 = 19 \cdot 5$, kterých je právě 18. Mezi dvojmístnými čísly je tak $90 - 18 = 72$ čísel, která 5 dělitelná nejsou. Podle Dirichletova principu tak mezi libovolnými 73 dvojmístnými čísly je aspoň jedno z nich dělitelné 5, tedy číslo 5 dělí i číslo n ze zadání úlohy. Podobně dvojmístná čísla dělitelná čtyřmi jsou $12 = 3 \cdot 4$ až $96 = 24 \cdot 4$, kterých je právě 22, tedy zbývajících $90 - 22 = 68$ čísel čtyřmi dělitelných není. Mezi libovolnými 73 dvojmístnými čísly je tak alespoň jedno, které je dělitelné 4. A konečně číslem 3 jsou dělitelná dvojmístná čísla $12 = 4 \cdot 3$ až $99 = 33 \cdot 3$, kterých je 30, a tedy podle Dirichletova principu mezi 73 dvojmístnými čísly je aspoň jedno dělitelné třemi. Tím je první část řešení hotova.

Nyní najdeme příklad čísla n, které má právě 73 dvojmístných dělitelů. Stačí se jistě omezit na dělitele nejmenšího společného násobku všech dvojmístných čísel, tedy čísla

$$2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot \underbrace{11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot \ldots \cdot 97}_{\text{součin všech dvojmístných prvočísel}}.$$

Vybírejme v pořadí podle velikosti prvočinitele pro číslo n v mocnině, jaké se vyskytují v uvedeném součinu, a postupně počítejme, kolik nových dvojmístných dělitelů čísla n každé nové prvočíslo přinese.

Nechť tedy nejvyšší mocnina 2 dělící číslo n je 2^6. Číslo n tak bude dělitelné třemi dvojmístnými čísly

$$2^4 = 16, \quad 2^5 = 32, \quad 2^6 = 64.$$

Podobně pokud nejvyšší mocnina čísla 3, která dělí n, je $3^4 = 81$, bude číslo n dále dělitelné dvojmístnými čísly

$$\begin{gathered} 3 \cdot 4 = 12, \quad 3 \cdot 8 = 24, \quad 3 \cdot 16 = 48, \quad 3 \cdot 32 = 96, \\ 3^2 \cdot 2 = 18, \quad 3^2 \cdot 4 = 36, \quad 3^2 \cdot 8 = 72, \quad 3^3 = 27, \quad 3^3 \cdot 2 = 54, \quad 3^4 = 81, \end{gathered}$$

kterých je 10.

Podobně pokud nejvyšší mocnina čísla 5, která dělí dělí n, je 5^2, bude číslo n dále dělitelné dvojmístnými čísly

$$\begin{gathered} 5 \cdot 2 = 10, \quad 5 \cdot 3 = 15, \quad 5 \cdot 4 = 20, \quad 5 \cdot 5 = 25, \quad 5 \cdot 6 = 30, \quad 5 \cdot 8 = 40, \\ 5 \cdot 9 = 45, \quad 5 \cdot 10 = 50, \quad 5 \cdot 12 = 60, \quad 5 \cdot 15 = 75, \quad 5 \cdot 16 = 80, \quad 5 \cdot 18 = 90, \end{gathered}$$

kterých je 12.

A pokud nejvyšší mocnina čísla 7, která dělí n, je 7^2, bude číslo n prozatím dělitelné čísly od 2 do 14 s výjimkou čísel 11 a 13. Těchto čísel je 11. Číslo n tak bude mít dále dvojmístné dělitele, které získáme vynásobením čísla 7 těmito 11 čísly. Vidíme, že nyní má takto vybrané číslo n již $3 + 10 + 12 + 11 = 36$ dělitelů.

Všechna dvojmístná prvočísla $11, 13, \ldots$ se ve výchozím součinu vyskytují v první mocnině. Pokračujme proto v rozšiřování dosud vytvořené hodnoty $n = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2$

s 36 dvojmístnými děliteli o dvojmístné prvočinitele s jediným zastoupením, a to opět postupně podle jejich velikosti. Přidáním prvočinitele 11 získá číslo n dalších 9 dvojmístných dělitelů od $11 \cdot 1 = 11$ do $11 \cdot 9 = 99$. Poté bude mít číslo n již $36 + 9 = 45$ dělitelů.

Přidáním prvočinitele 13 budou dalšími sedmi dvojmístnými děliteli čísla n čísla $13 \cdot 1 = 13$ až $13 \cdot 7 = 91$, celkem už tedy máme $45 + 7 = 52$ dvojmístných dělitelů čísla n. S každým přidaným prvočinitelem $p \in \{17, 19\}$, kterými bude číslo n dělitelné, mu přibude pět dvojmístných dělitelů od p do $5p$, a bude jich mít $52 + 10 = 62$. S prvočinitelem 23 dostaneme další čtyři dvojmístné dělitele $23 \cdot 1 = 23$ až $23 \cdot 4 = 92$, celkem jich už máme $62 + 4 = 66$. S každým z prvočinitelů $p \in \{29, 31\}$ dostaneme další tři dvojmístné dělitele p, $2p$, $3p$, takže dvojmístných dělitelů už je $66 + 6 = 72$. Chybí už jen jeden dvojmístný dělitel do požadovaného počtu 73, za něj musíme vzít nějaké prvočíslo větší než 50, kupříkladu 53.

Právě 73 dvojmístných dělitelů tak má například číslo

$$n = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 53.$$

Při konstrukci vyhovujícího čísla n můžeme postupovat i jinak: když například nejvyšší mocninou čísla 3, která dělí n, bude pouze 3^3 a v závěru namísto prvočísla 53 vezmeme prvočíslo 37, bude nové n mít navíc dvojmístné dělitele 37 a 74 a z původních přijde o dělitele 81 a 53. Dostaneme tak jiné vyhovující číslo

$$n_1 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37.$$

Jiné řešení. Nejmenší společný násobek všech 90 dvojmístných čísel

$$2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot \underbrace{11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot \ldots \cdot 97}_{\text{součin všech dvojmístných prvočísel}}$$

má právě 90 dvojmístných dělitelů. Pokud jej vydělíme všemi prvočísly od 53 do 97, kterých je právě 10, přijde výsledné číslo o deset dvojmístných dělitelů, a bude tak mít jen 80 dvojmístných dělitelů.

Pokud tento podíl dále vydělíme prvočísly $p \in \{37, 41, 43, 47\}$, přijde vzniklé číslo s každým prvočíslem p o dvojmístné dělitele p a $2p$. Po těchto čtyřech děleních tak bude mít výsledné číslo ještě $80 - 8 = 72$ dvojmístných dělitelů. Pokud bychom dále vydělili toto číslo následujícím prvočíslem 31, ztratili bychom již tři dvojmístné dělitele, 31, 62 a 93, což je moc. Aby ubyl jeden dvojmístný dělitel, stačí naše číslo dělit 3 (ztratíme jen dělitele $3^4 = 81$) nebo 2 (ubude dělitel $2^6 = 64$) a dostaneme tak vyhovující čísla

$$n_1 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37$$

(které jsme obdrželi již předchozí konstrukcí) a

$$n_2 = 2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37.$$

Uvědomme si, že pokud bychom v posledním kroku vydělili dosud sestrojené číslo místo 2 nebo 3 prvočíslem 5, ubyli by nám tři dělitelé 25, 50, 75.

Dodejme ještě pro zajímavost, že nejmenší společný násobek všech dvojmístných čísel (vypsaný v první větě tohoto řešení) má 248 446 976 dělitelů, kteří mají po 73 dvojmístných dělitelích. Nejmenší z nich je číslo n_1 nalezené postupem z původního řešení, největší pak číslo n_3, které dostaneme, když výchozí nejmenší společný násobek vydělíme součinem $2 \cdot 11 \cdot 13$:

$$n_3 = 2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot \underbrace{17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot \ldots \cdot 97}_{\text{součin všech dvojmístných prvočísel od 17 do 97}}.$$

Jiné řešení. Ukažme ještě jednu konstrukci čísla, které má právě 73 dvojmístných dělitelů. Vezměme součin všech dvojmístných čísel, která nejsou dělitelná sedmi, tj. vynecháme čísla $2 \cdot 7, \ldots, 14 \cdot 7$, kterých je 13. Vytvoříme tak součin $90 - 13 = 77$ čísel, který má právě těchto 77 dvojmístných dělitelů, neboť žádné z nich není dělitelné sedmi, jako je naopak každé ze 13 vynechaných čísel. Je tedy třeba ještě čtyři dělitele zrušit, a to třeba tak, že ze součinu odstraníme čtyři činitele, za něž vybereme libovolná čtyři prvočísla větší než 50, kupříkladu čtyři největší 97, 89, 83 a 79, a budeme pak hotovi. Dostaneme tak vyhovující číslo

$$n_4 = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot \underbrace{11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot \ldots \cdot 73}_{\text{součin všech dvojmístných prvočísel od 11 do 73}}.$$

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Přirozené číslo n není dělitelné sedmi. Ukažte, že má nejvýše 85 dělitelů menších než 100. [Číslo n jistě není dělitelné 14 čísly z množiny $\{7, 14, 21, 28, \ldots, 98\}$, tedy počet jeho dělitelů menších než 100 je nejvýše $99 - 14 = 85$.]

N2. Najděte přirozené číslo n, které není dělitelné sedmi a má právě 85 dělitelů menších než 100. [Za n stačí vzít součin všech čísel menších než 100, jež nejsou násobky sedmi.]

N3. Kolik dvojmístných dělitelů má číslo 2020^{2019}? [Protože $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$, dvojmístní dělitelé čísla 2020^{2019} budou právě ti, kteří mají v prvočíselném rozkladu pouze dvojky a pětky. Jsou to čísla (uspořádaná nejdříve podle mocnin čísla 5 a potom podle mocnin čísla 2, které je dělí)

$$2^4 = 16, \quad 2^5 = 32, \quad 2^6 = 64, \quad 5 \cdot 2 = 10, \quad 5 \cdot 2^2 = 20,$$
$$5 \cdot 2^3 = 40, \quad 5 \cdot 2^4 = 80, \quad 5^2 = 25, \quad 5^2 \cdot 2 = 50,$$

kterých je právě 9.]

N4. Kolik dvojmístných dělitelů má číslo $2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \cdot 5^5 \cdot 6^6 \cdot 7^7$? [Těch je 36. To zjistíme buďto přímo jejich vypsáním (10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 25, 27, 28, 30, 32, 35, 36, 40, 42, 45, 48, 49, 50, 54, 56, 60, 63, 64, 70, 72, 75, 80, 81, 84, 90, 96, 98), nebo zjištěním nad seznamem všech 21 dvojmístných prvočísel 11, 13, …, 97, že mají dohromady 54 dvojmístných násobků, totiž jednotlivě po řadě 9, 7, 5 (dvakrát), 4, 3 (dvakrát), 2 (čtyřikrát) a 1 (desetkrát) — hledaný počet je tedy $90 - 54 = 36$.]

N5. Kolik dvojmístných dělitelů má číslo $50! = 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$? [Na rozdíl od předcházející úlohy je snazší spočítat čísla, která děliteli nejsou. Jsou to všechna prvočísla větší než 50, těch je 10. Počet všech dvojmístných dělitelů tak je 80. Je potřeba si rozmyslet, že prvočísla menší než 50 jsou obsažena v čísle 50! v dostatečné mocnině.]

D1. Kolik dvojmístných dělitelů má číslo 20!? [Stačí vyloučit prvočísla větší než 20 a jejich násobky, těch je 28. Počet všech dvojmístných dělitelů tak je 62. Je potřeba si rozmyslet, že prvočísla menší než 20 jsou obsažena v čísle 20! v dostatečné mocnině.]

D2. Najděte všechna přirozená čísla n, pro něž má $n!$ více dvojmístných dělitelů než $(n-1)!$. [Jistě jsou to všechna prvočísla do sta, která jsou větší než 3, a pak čísla, kde $n!$ obsahuje vyšší mocninu nějakého prvočísla než $(n-1)!$ takovou, že tato mocnina je menší než sto, tj. pro $p = 7$ je to $n = 14$, pro $p = 5$ $n = 10$, pro $p = 3$ $n = 6, 9$ a pro $p = 2$ $n = 4, 6, 8$, tj. jsou to všechna prvočísla od 5 do 97 a navíc $4, 6, 8, 9, 10, 14$.]

D3. Existuje přirozené číslo n, že $n!$ je dělitelný právě polovinou ze všech dvojmístných čísel? [Je třeba brát prvočísla menší než sto od největšího a dívat se, kolik jeho násobků je menších než 100. Ukáže se, že 12! má 43 dvojmístných dělitelů a 13! má 50 dvojmístných dělitelů, tj. 45 dvojmístných dělitelů nemá žádné $n!$.]

D4. Najděte nejmenší přirozené číslo k takové, že každá k-prvková množina trojmístných po dvou nesoudělných čísel obsahuje aspoň jedno prvočíslo. [56–B–I–3]

D5. Z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 99\}$ vyberte co největší počet čísel tak, aby součet žádných dvou vybraných čísel nebyl násobkem jedenácti. Vysvětlete, proč zvolený výběr má požadovanou vlastnost a proč žádný výběr většího počtu čísel nevyhovuje. [58–C–I–5]

D6. Určete nejmenší přirozené číslo k s vlastností: Vybereme-li libovolných k různých čísel z množiny $\{1, 2, \dots, 1999\}$, pak mezi nimi existují dvě, jejichž součet je 2000. [49–C–S–1]

D7. Určete nejmenší přirozené číslo k s vlastností: Vybereme-li libovolných k různých čísel z množiny $\{1, 2, \dots, 2000\}$, pak mezi nimi existují dvě, jejichž součet nebo rozdíl je 667. [49–A–S–3]

D8. Najděte všechna přirozená čísla, která mají stejný počet sudých i lichých dělitelů. [Jsou to čísla tvaru $2l$, kde l je liché číslo. Každé hledané číslo musí sudé — tehdy ovšem předpis $d \mapsto 2d$ určuje injektivní zobrazení množiny všech jeho lichých dělitelů do množiny všech jeho sudých dělitelů, tudíž toto zobrazení musí být podle zadání i surjektivní, a proto je hledané číslo tvaru $2l$, kde l je jeho největší lichý dělitel.]

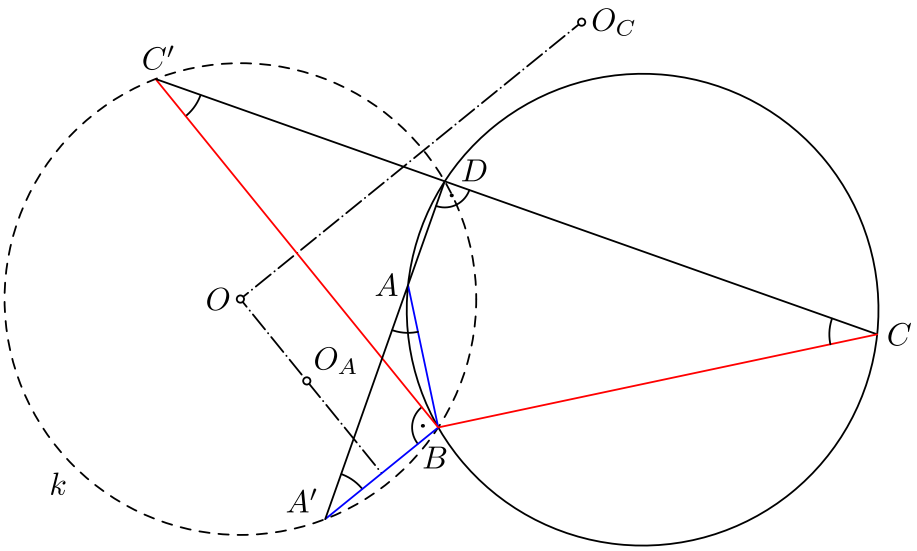
D9. Součin všech kladných dělitelů přirozeného čísla n je 20^{15}. Určete n. [64–B–II–1]

3. *Nechť AC je průměr kružnice opsané tětivovému čtyřúhelníku $ABCD$. Předpokládejme, že na polopřímkách opačných k polopřímkám AD a DC existují po řadě body $A' \neq A$ a $C' \neq D$ takové, že platí $|AB| = |A'B|$ a $|BC| = |BC'|$. Dokažte tvrzení:*

a) Body A', B, C' a D leží na téže kružnici k.

b) Je-li O střed kružnice k a O_A, O_C jsou po řadě středy kružnic opsaných trojúhelníkům $AA'B$, $CC'B$, pak platí $OO_A \perp OO_C$. (Jaroslav Švrček)

Řešení. a) Jelikož čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový, je součet jeho vnitřních úhlů u vrcholů A a C roven $180°$, tedy úhly BCD a BAA' jsou shodné (druhý z nich je vnější k vnitřnímu úhlu čtyřúhelníku u vrcholu A, obr. 1). Trojúhelník ABA' je z rovnosti $|AB| = |A'B|$ rovnoramenný, jeho vnitřní úhly u vrcholů A a A' jsou tak shodné. Podobně jsou shodné vnitřní úhly u vrcholů C a C' v trojúhelníku BCC'. Tudíž i úhly $DC'B$ a $DA'B$ jsou shodné. Protože body A' a C' leží v téže polorovině BDA, plyne odtud podle věty o obvodovém úhlu, že body A', B, D a C' leží na téže kružnici k, což jsme měli dokázat.



Obr. 1

b) Protože AC je průměrem kružnice opsané čtyřúhelníku $ABCD$, je podle Thaletovy věty úhel ADC, tedy i úhel $A'DC$ (a k němu vedlejší úhel $A'DC'$) pravý. Úsečka $A'C'$ je tak z Thaletovy věty průměrem kružnice k, tedy i úhel $A'BC'$ je pravý. Body O a O_A leží na ose úsečky BA', podobně i body O a O_C leží na ose úsečky BC'. Ovšem, jak jsme již dokázali, úsečky BA' a BC' jsou na sebe kolmé, tedy i jejich osy OO_A a OO_C jsou na sebe kolmé, a tudíž platí $OO_A \perp OO_C$, což jsme měli dokázat.

Poznámka. Dodejme pro zajímavost, že obě kružnice na obr. 1 jsou shodné, neboť jsou opsány trojúhelníkům ABC a $A'BC'$, a ty jsou shodné podle věty *sus* (jak plyne ze dvou rovností ze zadání a z našeho zjištění v části b) řešení, že pravý je nejen úhel ABC, ale i úhel $A'BC'$).

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Připomeňte si Thaletovu větu a obecnější poznatek o obvodových a středových úhlech v dané kružnici.

N2. Čtyři různé body A, B, C, D leží na jedné kružnici. Dokažte, že osy úseček AB, AC, AD, BC, BD, CD procházejí týmž bodem. [Je to střed kružnice procházející body A, B, C, D.]

N3. Nechť M je vnitřní bod základny BC rovnoramenného trojúhelníku ABC. Na jeho rameni AB leží bod D tak, že $|MB| = |MD|$. Dokažte, že body A, C, M, D leží na jedné kružnici. [Z rovnoramenných trojúhelníků ABC a MBD plyne postupně shodnost úhlů ACM, ACB, CBA, MBD a MDB, poslední z nich je však vedlejší úhel k úhlu ADM, takže součet úhlů u protilehlých vrcholů C a D čtyřúhelníku $ADMC$ je roven $180°$.]

D1. Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník, v němž $AD \perp BD$. Označme M průsečík jeho úhlopříček a sestrojme kolmý průmět P bodu M na přímku AB a kolmý průmět Q bodu B na přímku AC. Dokažte, že bod M je středem kružnice vepsané trojúhelníku PQD. [68–B–I–5]

D2. Je dána kružnice k a její průměr AB. Uvnitř úsečky AB zvolíme libovolný bod C a pak na kružnicik vybereme bod D tak, aby platilo $|BC| = |BD|$. Osa úhlu ABD protne kružnici k v bodě E (různém od bodu B). Dokažte, že trojúhelníky AEC a CBD jsou podobné. [68–B–S–3]

D3. Je dána kružnice k se středem S a tětivou AB, která není jejím průměrem. Na polopřímce opačné k polopřímce BA je vybrán libovolný bod K různý od B. Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku AKS protne kružnici k v takovém bodě C, který je souměrně sdružený s bodem B podle přímky SK. [68–B–II–3]

D4. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Označme D patu výšky z vrcholu A a D_1, D_2 obrazy bodu D v osových souměrnostech po řadě podle přímek AB, AC. Dále označme E_1 a E_2 body na přímce BC takové, že $D_1E_1 \parallel AB$ a $D_2E_2 \parallel AC$. Dokažte, že body D_1, D_2, E_1, E_2 leží na téže kružnici, jejíž střed leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC. [68–A–I–2]

D5. Nechť V je průsečík výšek ostroúhlého trojúhelníku ABC. Přímka CV je společnou tečnou kružnic k a l, které se vně dotýkají v bodě V a přitom každá z nich prochází jedním z vrcholů A a B. Jejich průsečíky s vnitřky stran AC a BC označme P a Q. $Q \neq B$). Dokažte, že polopřímka VC je osou úhlu PVQ a že body A, B, P, Q leží na jedné kružnici. [62–B–I–3]

D6. V rovině je dán pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ s delší stranou AB a pravým úhlem při vrcholu A. Označme k_1 kružnici sestrojenou nad stranou AD jako průměrem a k_2 kružnici procházející vrcholy B, C a dotýkající se přímky AB. Mají-li kružnice k_1, k_2 vnější dotyk v bodě P, je přímka BC tečnou kružnice opsané trojúhelníku CDP. Dokažte. [52–B–II–4]

D7. V rovině je dán rovnoběžník $ABCD$, jehož úhlopříčka BD je kolmá ke straně AD. Označme M ($M \neq A$) průsečík přímky AC s kružnicí o průměru AD. Dokažte, že osa úsečky BM prochází středem strany CD. [57–B–II–3]

D8. Nechť K je libovolný vnitřní bod strany AB daného trojúhelníku ABC. Přímka CK protíná kružnici opsanou trojúhelníku ABC v bodě L ($L \neq C$). Označme k_1 kružnici opsanou trojúhelníku AKL a k_2 kružnici opsanou trojúhelníku BKL.
   a) Dokažte, že přímka AC je tečna kružnice k_1, právě když přímka BC je tečna kružnice k_2.
   b) Předpokládejme, že přímka AC je sečna kružnice k_1. Nechť P ($P \neq A$) je průsečík přímky AC s kružnicí k_1 a Q ($Q \neq B$) průsečík přímky BC s kružnicí k_2. Dokažte, že bod K leží na úsečce PQ. [53–A–II–3]

D9. Jsou dány kružnice k, l, které se protínají v bodech A, B. Označme K, L po řadě dotykové body jejich společné tečny zvolené tak, že bod B je vnitřním bodem trojúhelníku AKL. Na kružnicích k a l zvolme po řadě body N a M tak, aby bod A byl vnitřním bodem úsečky MN. Dokažte, že čtyřúhelník $KLMN$ je tětivový, právě když přímka MN je tečnou kružnice opsané trojúhelníku AKL. [60–A–I–3]

4. *Nechť p, q jsou daná nesoudělná přirozená čísla. Dokažte, že pokud má rovnice*

$$px^2 - (p+q)x + p = 0$$

celočíselný kořen, potom má celočíselný kořen i rovnice

$$px^2 + qx + p^2 - q = 0.$$

(Patrik Bak)

Řešení. Nechť x_0 je celočíselný kořen první rovnice. Z jejího přepisu do tvaru

$$p(x_0^2 + 1) = (p+q)x_0 \tag{1}$$

vidíme, že $x_0 > 0$, protože zbývající činitelé p, x_0^2+1 a $p+q$ v (1) jsou podle předpokladu přirozená čísla. Největší společný dělitel čísel x_0 a x_0^2+1 dělí i číslo $(x_0^2+1) - x_0 \cdot x_0 = 1$, takže čísla x_0 a $x_0^2 + 1$ jsou nesoudělná, a z rovnice (1) tak plyne, že x_0 dělí číslo p. Naopak, z nesoudělnosti čísel p a q plyne i nesoudělnost čísel p a $p + q$, a tak z výše uvedené rovnice vidíme, že také číslo p dělí x_0. Protože obě tato čísla jsou přirozená, plyne odtud $x_0 = p$.

Dosadíme-li p za x_0 do (1) a pak obě strany vydělíme nenulovou hodnotou p, dostaneme

$$p^2 + 1 = p + q \quad \text{neboli} \quad q = p^2 - p + 1.$$

Nyní toto vyjádření čísla q dosadíme do druhé zadané rovnice a postupně upravíme:

$$\begin{aligned}0 &= px^2 + (p^2 - p + 1)x + p^2 - (p^2 - p + 1) = \\ &= px^2 + (p^2 - p + 1)x + p - 1 = (px + 1)(x + p - 1).\end{aligned}$$

Vidíme, že upravená, a tedy i druhá původně zadaná rovnice má celočíselný kořen $1-p$. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Poznámka. Klíčový vztah $q = p^2 - p + 1$ můžeme rovněž odvodit tak, že rovnost (1) přepíšeme do tvaru

$$\frac{p}{p+q} = \frac{x_0}{x_0^2 + 1},$$

v němž na obou stranách stojí zlomky v základním tvaru, takže se musejí rovnat jak jejich čitatelé, tak i jmenovatelé: $p = x_0$ a $p + q = x_0^2 + 1 = p^2 + 1$, odkud už máme $q = p^2 - p + 1$.

Poznámka. Ukažme na příkladech, že pro soudělná přirozená čísla p, q tvrzení úlohy obecně neplatí. Pro $p = q = 2$ má první rovnice $2x^2 - 4x + 2 = 0$ celočíselný kořen 1, zatímco druhá rovnice $2x^2 + 2x + 2 = 0$ nemá žádný kořen. Jiná situace nastane pro $p = 14$ a $q = 86$: první rovnice $14x^2 - 100x + 14 = 0$ má kořen 7, avšak druhá rovnice $14x^2 + 86x + 110 = 0$ má pouze iracionální kořeny.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte, že pokud a, b a c jsou kladná reálná čísla, pak je kladný i každý kořen kvadratické rovnice $ax^2 - bx + c = 0$. [Levá strana rovnice je kladná pro každé $x \leqq 0$.]

N2. Dokažte, že má-li rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ celočíselné koeficienty a, b a c, pak každý její kořen, který je také celým číslem, musí být dělitelem čísla c. [Plyne to z úpravy rovnice do tvaru $c = -x(ax + b)$.]

N3. Nechť přirozené číslo a je dělitelem přirozeného čísla b a současně číslo b je dělitelem a. Potom $a = b$. Dokažte. [Platí $a \leqq b$ i $b \leqq a$.]

N4. Přirozená čísla a a b jsou nesoudělná, stejně jako přirozená čísla c a d. Dokažte, že z rovnosti $ac = bd$ pak plyne $a = d$ a $b = c$. [Uvažte, kdy z $x \mid yz$ plyne $x \mid z$.]

N5. Dokažte, že jsou-li čísla a, b nesoudělná, platí totéž i o číslech a, $a+b$. [Každý společný dělitel čísel a, $a+b$ dělí i číslo $(a+b)-a = b$.]

N6. Nechť a je přirozené číslo, určete všechny možné největší společné dělitele čísel a a a^2+4. [Nechť d je největší společný dělitel obou čísel, potom d dělí číslo $(a^2+4) - a \cdot a = 4$. Největší společný dělitel obou čísel tak může být 1, 2 nebo 4. První možnost nastane pro a lichá, druhá pro a dělitelná dvěma a ne čtyřmi, třetí pro a dělitelná čtyřmi.]

N7. Nechť p je přirozené číslo. Najděte kořeny rovnice $px^2 + (p^2 - p + 1)x + p - 1 = 0$. [$x_1 = -1/p$, $x_2 = 1 - p$]

D1. Najděte všechna trojmístná čísla n, jejichž druhá mocnina končí stejným trojčíslím jako druhá mocnina čísla $3n - 2$. [50–B–S–1]

D2. Najděte všechny dvojice (a, b) celých čísel, jež vyhovují rovnici

$$a^2 + 7ab + 6b^2 + 5a + 4b + 3 = 0.$$

[56–B–I–1]

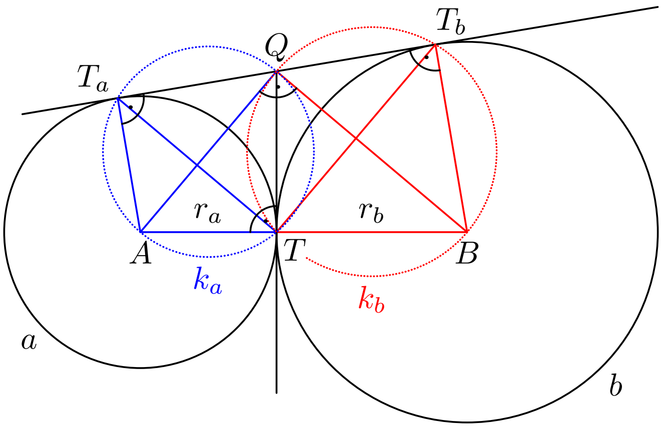
D3. Najděte všechna řešení rovnice $xyz = 3(x+y+z)$ v oboru celých kladných čísel. Řešení, která se liší jen pořadím, nepovažujeme za různá. [36–B–II–3b]

D4. Kolik existuje celých kladných čísel $x \leqq 2\,002\,000$ takových, že číslo $2\,002\,000$ dělí číslo $x^3 - x$? [41–B–I–6]

D5. Číslo $2n^4 + n^3 + 50$ je dělitelné šesti právě pro ta přirozená čísla n, pro která je číslo $2 \cdot 4^n + 3^n + 50$ dělitelné třinácti. Dokažte. [45–B–I–4]

5. *Jsou dány kružnice $a(A; r_a)$, $b(B; r_b)$, které se vně dotýkají v bodě T. Jejich společná vnější tečna se dotýká kružnice a v bodě T_a a kružnice b v bodě T_b. Pomocí r_a, r_b vyjádřete poměr poloměrů kružnic k_a, k_b opsaných po řadě trojúhelníkům T_aAT, T_bBT.* (Šárka Gergelitsová)

Řešení. Označme Q průsečík společné vnější tečny T_aT_b se společnou vnitřní tečnou kružnic a a b v bodě T. Tečna ke kružnici svírá s průměrem této kružnice procházejícím bodem dotyku pravý úhel, a tak úhly AT_aQ a ATQ jsou pravé. Body T_a a T tak leží podle Thaletovy věty na kružnici s průměrem AQ, tato kružnice je pak také kružnicí k_a opsanou trojúhelníku T_aAT (obr. 2). Podobně ukážeme, že QB je průměrem kružnice k_b.



Obr. 2

Přímky QT a QT_a jsou tečny kružnice a, přímka QA procházející jejím středem je tak osou úhlu TQT_a. Z podobného důvodu je přímka QB osou úhlu TQT_b. Úhel T_aQT_b je přímý, přímky AQ a BQ tak svírají pravý úhel a trojúhelník ABQ je pravoúhlý. Velikost jeho odvěsny AQ je podle Eukleidovy věty $|AQ| = \sqrt{r_a(r_a + r_b)}$ a pro velikost druhé odvěsny platí $|BQ| = \sqrt{r_b(r_a + r_b)}$.

Hledaný poměr poloměrů kružnic opsaných trojúhelníkům T_aAT, T_bBT je roven poměru velikostí jejich průměrů AQ a BQ, tedy

$$\frac{|AQ|}{|BQ|} = \frac{\sqrt{r_a(r_a + r_b)}}{\sqrt{r_b(r_a + r_b)}} = \sqrt{\frac{r_a}{r_b}}.$$

Jiné řešení. Stejně jako v předcházejícím řešení uvažujme průsečík Q společné vnitřní a vnější tečny kružnic a, b. Ze symetrie tečen ke kružnici a plyne $|TQ| = |T_aQ|$ a podobně ze symetrie tečen ke kružnici b plyne $|TQ| = |T_bQ|$. Bod Q je tak středem kružnice opsané trojúhelníku TT_aT_b a jeho strana T_aT_b je zároveň jejím průměrem. Podle Thaletovy věty je tudíž úhel T_aTT_b pravý. Součet velikostí úhlů ATT_a a BTT_b je tedy $90°$. Z kolmosti $QT \perp AT$ tak dostáváme, že úhel T_aTQ má stejnou velikost jako úhel T_bTB, a proto jsou rovnoramenné trojúhelníky T_aQT a T_bBT podobné. Bod Q ovšem leží na kružnici k_a opsané trojúhelníku ATT_a, neboť čtyřúhelník $ATQT_a$ je podle Thaletovy věty tětivový. V podobnosti trojúhelníků $T_aQT \sim T_bBT$ tak kružnici k_a odpovídá kružnice k_b, která je opsána trojúhelníku T_bBT. Odtud plyne, že poměr poloměrů kružnic k_a a k_b je roven poměru délek jejich tětiv QT a BT. Analogickou úvahou o podobnosti trojúhelníků $T_aAT \sim T_bQT$ s přihlédnutím k tomu, že bod Q leží na kružnici b, dostaneme, že týž poměr je stejný jako poměr délek jiných jejich tětiv AT a QT. Proto hodnotu p hledaného poměru můžeme získat jako odmocninu ze součinu jí rovných hodnot:

$$p = \sqrt{\frac{|QT|}{|BT|} \cdot \frac{|AT|}{|QT|}} = \sqrt{\frac{|AT|}{|BT|}} = \sqrt{\frac{r_a}{r_b}}.$$

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Nechť V_a a V_b jsou paty výšek trojúhelníku ABC po řadě z vrcholů A a B a V je průsečík jeho výšek. a) Dokažte, že body A, B, V_a, V_b leží na téže kružnici. b) Dokažte, že body V, V_a, C, V_b leží na téže kružnici. [a) Podle Thaletovy věty je to kružnice s průměrem AB. b) Podle Thaletovy věty je to kružnice s průměrem CV.]

N2. Připomeňte si znění Eukleidových vět o výšce a odvěsně pravoúhlého trojúhelníku.

N3. Kružnice k_b leží vně kružnice k_a a je s ní disjunktní. Nechť jejich vnější společné tečny T_aT_b a T_AT_B ($T_a, T_A \in k_a$, $T_b, T_B \in k_b$, $T_a \neq T_A$ a $T_b \neq T_B$) protínají jejich společnou vnitřní tečnu V_aV_b ($V_a \in k_a$, $V_b \in k_b$) po řadě v bodech A a B. Dokažte, že $|T_aT_b| = |T_AT_B| = |AB|$. [První rovnost plyne ze souměrnosti podle přímky procházející středy obou kružnic. Dále ze souměrnosti platí $|T_aA| = |V_aA|$, $|T_bA| = |V_bA|$, $|T_AB| = |V_aB|$, $|T_BB| = |V_bB|$. Sečtením těchto rovnic dostaneme $|T_aA| + |T_bA| + |T_AB| + |T_BB| = |V_aA| + |V_bA| + |V_aB| + |V_bB|$. Na levé straně rovnice je součet (stejných) délek $|T_aT_b|$ a $|T_AT_B|$, na pravé dvojnásobek $|AB|$, odtud tak plyne druhá dokazovaná rovnost.]

D1. Pravoúhlému trojúhelníku ABC s přeponou AB je opsána kružnice. Paty kolmic z bodů A, B na tečnu k této kružnici v bodě C označme D, E. Vyjádřete délku úsečky DE pomocí délek odvěsen trojúhelníku ABC. [58–C–I–2]

D2. Pravoúhlému trojúhelníku ABC s přeponou AB a obsahem S je opsána kružnice. Tečna k této kružnici v bodě C protíná tečny vedené body A a B v bodech D a E.Vyjádřete délku úsečky DE pomocí délky c přepony a obsahu S. [58–C–II–4]

D3. Nechť k je polokružnice sestrojená nad průměrem AB, která leží ve čtverci $ABCD$. Uvažujme její tečnu t_1 z bodu C (různou od BC) a označme P její průsečík se stranou AD. Nechť t_2 je společná vnější tečna polokružnice k a kružnice vepsané trojúhelníku CDP (různá od AD). Dokažte, že přímky t_1 a t_2 jsou navzájem kolmé. [51–B–I–3]

D4. Kružnice $k(S; r)$ a $l(O; R)$ se vně dotýkají v bodě T. Jejich společná tečna v bodě T protíná jejich vnější společnou tečnu v bodě M. Dokažte, že trojúhelník SOM je pravoúhlý, a vyjádřete jeho obsah pomocí poloměrů r a R daných kružnic. [50–C–II–2]

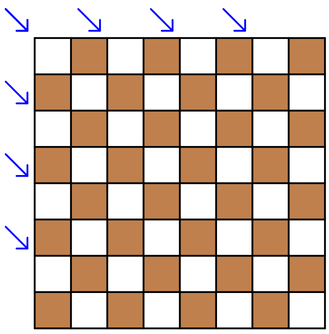
D5. V rovině jsou dány kružnice k a l, které se protínají v bodech E a F. Tečna ke kružnici l sestrojená v bodě E protíná kružnici k v bodě H ($H \neq E$). Na oblouku EH kružnice k, který neobsahuje bod F, zvolme bod C ($E \neq C \neq H$) a průsečík přímky CE s kružnicí l označme D ($D \neq E$). Dokažte, že trojúhelníky DEF a CHF jsou podobné. [66–B–II–3]

D6. Kružnice k se středem S je opsána pravidelnému šestiúhelníku $ABCDEF$. Tečna v bodě A ke kružnici k protne přímku SB v bodě K a tečna v bodě B protne přímku SC v bodě L. Dokažte, že čtyřúhelníku $KLCB$ lze opsat kružnici, která je shodná s kružnicí k. [56–C–S–2]

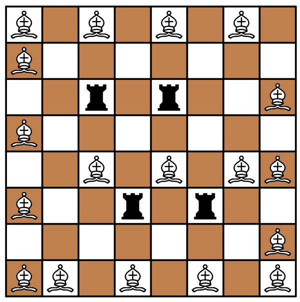
6. *Figurka střelce ohrožuje na šachovnici libovolné pole diagonály, na níž střelec stojí. Pokud ovšem na některém poli diagonály stojí věž, střelec už pole za ní neohrožuje. Určete největší možný počet střelců, které můžeme spolu se čtyřmi věžemi umístit na šachovnici* 8×8 *tak, aby se střelci navzájem neohrožovali.* (Ján Mazák)

Řešení. Každé bílé pole leží na některé ze sedmi diagonál rovnoběžných s bílou hlavní diagonálou a vyznačených na levém obrázku šipkami. Podobně leží černá pole na některé ze sedmi diagonál rovnoběžných s černou hlavní diagonálou. Na každé z těchto diagonál bez věží může stát nejvýše jeden střelec. Na prázdnou šachovnici lze tedy umístit nejvýše 14 střelců.

V obecné situaci, kdy je na šachovnici rozmístěno řekněme k věží, pro každou diagonálu D ze 14 námi uvažovaných označíme k_D počet věží, které na ní stojí. Celá čísla k_D jsou tedy nezáporná a jejich součet je roven k. Přítomných k_D věží vymezuje na diagonále D zřejmě nejvýše $k_D + 1$ úseků polí bez věže a na každém z nich může být nejvýše jeden střelec, tudíž na celé diagonále D je dohromady nejvýše $k_D + 1$ střelců. Počet neohrožujících se střelců na celé šachovnici tak nepřevyšuje součet 14 čísel $k_D + 1$, který je roven $k + 14$, tedy 18 v případě $k = 4$.



Obr. 3



Obr. 4

Pravý obrázek ukazuje příklad šachovnice se čtyřmi věžemi, na kterou jsme umístili 18 střelců, aby se navzájem neohrožovali.

Odpověď. Hledaný největší počet střelců, které lze umístit spolu se čtyřmi věžemi na šachovnici tak, aby se střelci navzájem neohrožovali, je právě 18.

Návodné a doplňující úlohy:

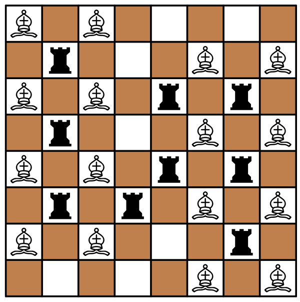
N1. Jaký největší počet střelců lze umístit na bílá pole šachovnice 8×8 tak, aby se navzájem neohrožovali? [Sedm. Na šachovnici uvažujme diagonály rovnoběžné s bílou hlavní diagonálou. Včetně jí je jich právě 7. Na každou můžeme umístit nejvýše jednoho střelce. Protože každé bílé pole leží na některé z těchto diagonál, můžeme tak na šachovnici umístit nejvýše 7 střelců. Vyhovující umístění 7 střelců můžeme vybrat například tak, že budou v počtech 4 a 3 v krajních sloupcích šachovnice.]

N2. Určete největší počet střelců, které můžeme umístit na bílou hlavní diagonálu šachovnice 8×8 spolu se dvěma věžemi tak, aby se navzájem neohrožovali ve smyslu zadání soutěžní úlohy. [Dvě věže rozdělí diagonálu na nejvýše tři části. Na každou můžeme umístit nejvýše jednoho střelce. Proto je hledaný počet střelců nejvýše tři. A tyto tři střelce už umíme umístit na šachovnici spolu se dvěma věžemi požadovaným způsobem, například střelce umístíme na první, třetí a páté pole a věže na druhé a čtvrté pole diagonály.]

N3. Určete největší počet králů, které můžeme umístit na šachovnici 8×8 tak, aby se navzájem neohrožovali. [Šachovnici rozdělíme na 16 čtverců 2×2, na každý z nich můžeme umístit nejvýše jednoho krále, proto je králů nejvýše 16. Šestnáct králů už na šachovnici umístit umíme, například na ta pole, jejichž obě souřadnice jsou liché.]

N4. Určete největší počet králů, které můžeme umístit na šachovnici 9×9 tak, aby se navzájem neohrožovali. [Přidáme-li jeden řádek a jeden sloupec šachovnice, dostaneme šachovnici 10×10, na kterou můžeme podle podobné úvahy jako v řešení N3 umístit nejvýše 25 králů. A ty umíme umístit, například na pole, jejichž obě souřadnice jsou liché.]

D1. Najděte největší přirozené číslo k, pro které lze na šachovnici 8×8 rozmístit k věží a $k + 14$ navzájem se neohrožujících střelců. [$k = 18$. Celou šachovnici lze rozložit na sedm bílých diagonál délek 2, 4, 6, 8, 6, 4, 2 a sedm černých diagonál těchže délek. Pokud se na libovolné z těchto 14 diagonál D nachází k_D věží, je na ní nejvýše $k_D + 1$ navzájem se neohrožujících střelců. Podle zadání je však celkový počet střelců o 14 větší než celkový počet věží, proto na každé uvažované diagonále D musí být právě $k_D + 1$ střelců. To je pro diagonály D délek 2, 4, 6, 8 možné, jen pokud odpovídající k_D nepřevyšuje po řadě hodnoty 0, 1, 2, 3. Proto počet k věží na celé šachovnici nepřevyšuje hodnotu $2(0+1+2+3+2+1+0) = 18$. Hodnota $k = 18$ je přitom možná, jak ukazuje příklad rozmístění 9 věží a $9 + 7 = 16$ střelců na bílých polích podle obrázku; rozmístění stejných počtů věží a střelců na černých polích provedeme analogicky.]



D2. Každý vrchol pravidelného devatenáctiúhelníku je obarven jednou ze šesti barev. Vysvětlete, proč stejnou barvu mají všechny vrcholy některého tupoúhlého trojúhelníku. [62–C–S–3]

D3. Na desce 7×7 hrajeme hru lodě. Nachází se na ní jedna loď 2×3. Můžeme se zeptat na libovolné políčko desky, a pokud loď zasáhneme, hra končí. Pokud ne, ptáme se znovu. Určete nejmenší počet otázek, které potřebujeme, abychom jistě loď zasáhli. [58–B–I–4]

D4. Na desce 5×5 hrajeme hru lodě. Ze čtyř polí desky je vytvořena jedna loď tvaru L-tetromina. Můžeme se zeptat na libovolné pole desky, a pokud loď zasáhneme, hra končí.
   a) Navrhněte osm polí, na něž se stačí otázat, abychom měli jistotu zásahu lodě.
   b) Zdůvodněte, že sedm otázek obecně takovou jistotu nedává. [58–B–II–2]

D5. Na některé políčko šachovnice 6×6 postavíme figurku kralevice. Ta může v jednom tahu poskočit buďto ve svislém, nebo ve vodorovném směru. Délka tohoto skoku je střídavě jedno či dvě políčka, přičemž skokem na sousední pole figurka začíná. Rozhodněte, zda lze zvolit výchozí pozici figurky tak, aby po vhodné posloupnosti 35 skoků navštívila každé pole šachovnice právě jednou. [65–A–III–6]

D6. Pole tabulky $n \times n$, kde $n \geqq 3$, jsou střídavě černá a bílá jako na obyčejné šachovnici, přičemž pole v levém horním rohu je černé. Bílá pole budeme barvit načerno následujícím postupem. V jednom kroku vybereme libovolný obdélník 2×3 nebo 3×2, ve kterém jsou ještě tři bílá pole, a tato tři pole začerníme. Pro která n můžeme po určitém počtu kroků začernit celou tabulku? [57–A–II–3]

D7. Zjistěte nejmenší přirozená čísla k, pro něž platí jednotlivá tvrzení a), b) a c): Obsadíme-li figurkami libovolných k polí šachovnice 8×8, pak budou obsazena některá a) tři sousední pole některého řádku, b) tři sousední pole některé šikmé řady, c) čtyři sousední pole některého řádku nebo sloupce. Šikmou řadou rozumíme takovou skupinu polí, jejichž úhlopříčky jednoho z obou směrů leží na jedné a téže přímce. [49–C–I–3]