I. kolo kategorie Z5

Z5–I–1

Čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9 cestovala vlakem. Vlak měl tři vagóny a v každém se vezla právě tři čísla. Číslo 1 se vezlo v prvním vagónu a v posledním vagónu byla všechna čísla lichá. Průvodčí cestou spočítal součet čísel v prvním, druhém i posledním vagónu a pokaždé mu vyšel stejný součet.

Určete, jak mohla být čísla do vagónů rozdělena. (*V. Hucíková*)

Nápověda. Zjistěte, jaký byl součet čísel v každém vagónu.

Možné řešení. Součet všech čísel ve všech vagónech je

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45.$$

Součet čísel v každém vagónu tedy byl $45 : 3 = 15$.

Ve třetím vagónu se vezla tři lichá čísla jiná než 1, z nich lze získat součet 15 pouze jako $3 + 5 + 7$. V prvním vagóně se vedle 1 vezla ještě některá dvě čísla z 2, 4, 6, 8, 9. Z těchto čísel lze získat součet 15 pouze jako $1 + 6 + 8$. Do druhého vagónu tak zbývají čísla 2, 4, 9 (pro kontrolu $2 + 4 + 9 = 15$).

Úloha má jediné řešení: v prvním vagónu se vezla čísla 1, 6, 8, ve druhém vagónu 2, 4, 9, ve třetím vagónu 3, 5, 7.

Jiné řešení. I bez určení součtu čísel v každém vagónu lze na uvedené řešení přijít zkoušením. Nejméně možností je v posledním vagónu, kde se vezla některá tři čísla z 3, 5, 7, 9:

- Trojice 5, 7, 9 má součet 21 a stejný součet by musel být i v prvním vagónu. Ze dvou zbylých čísel a 1 však lze získat nejvýše $1 + 6 + 8 = 15$, což nevyhovuje.
- Trojice 3, 7, 9 má součet 19; v prvním vagónu by pak mohl být součet nejvýše $1 + 6 + 8 = 15$, což také nevyhovuje.
- Trojice 3, 5, 9 má součet 17; v prvním vagónu by pak mohl být součet nejvýše $1 + 7 + 8 = 16$, což také nevyhovuje.
- Trojice 3, 5, 7 má součet 15; v prvním vagónu by pak mohla být trojice 1, 6, 8 se součtem 15, což je vyhovující možnost.

Do druhého vagónu tak zbývají čísla 2, 4, 9, která mají taktéž součet 15.

Z5–I–2

Marta nesla své nemocné kamarádce Marušce 7 jablek, 6 hrušek a 3 pomeranče. Cestou ale dva kusy ovoce snědla. Určete, která z následujících situací mohla nastat a jaké dva kusy ovoce by Marta v takovém případě musela sníst:

a) Maruška nedostala žádný pomeranč.
b) Maruška dostala méně hrušek než pomerančů.
c) Maruška dostala stejný počet jablek, hrušek i pomerančů.
d) Maruška dostala stejný počet kusů ovoce dvojího druhu.
e) Maruška dostala více jablek než zbývajících kusů ovoce dohromady. (*L. Hozová*)

Nápověda. Zvažte postupně všechny možnosti, které kusy ovoce mohla Marta sníst.

Možné řešení. Existuje jenom několik málo možností, které kusy ovoce Marta cestou snědla. Probereme všechny možnosti a porovnáme s nabízenými situacemi a)–e). Jednotlivé druhy ovoce značíme jejich počátečními písmeny:

Marta snědla	Maruška dostala
$2j$	$5j + 6h + 3p$
$j + h$	$6j + 5h + 3p$
$j + p$	$6j + 6h + 2p$
$2h$	$7j + 4h + 3p$
$h + p$	$7j + 5h + 2p$
$2p$	$7j + 6h + p$

Odtud vidíme, že situace a), b) c), e) nemohly nastat nikdy a situace d) pouze ve třetím případě: Marta tedy cestou snědla jablko a pomeranč, Marušce donesla 6 jablek, 6 hrušek a 2 pomeranče.

Z5–I–3

Maminka vyprala čtvercové utěrky a věší je vedle sebe na prádelní šňůru nataženou mezi dvěma stromy. Použila šňůru o délce 7,5 metru, přičemž na uvázání kolem kmenů potřebovala na každé straně 8 dm. Všechny utěrky mají šířku 45 cm. Mezi krajní utěrkou a kmenem maminka nechává mezeru alespoň 10 cm, utěrky se jí nepřekrývají a nemá je složené ani skrčené.

Kolik nejvíce utěrek může takto pověsit na nataženou šňůru? (*L. Dedková*)

Nápověda. Nejprve zjistěte, kolik šňůry může být využito k vlastnímu věšení utěrek.

Možné řešení. Všechny rozměry budeme vyjadřovat ve stejných jednotkách, a to v dm. Délka napnuté šňůry mezi stromy je rovna $75 - 2 \cdot 8 = 59$ (dm). Z každé strany má navíc zůstat volný 1 dm. K vlastnímu věšení tedy může být použito $59 - 2 \cdot 1 = 57$ (dm).

Každá utěrka je široká 4,5 dm, jedna dvojice utěrek tedy zabírá nejméně 9 dm. Šest dvojic utěrek zabírá nejméně 54 dm, v takovém případě zbude nejvýše 3 dm šňůry ($57 = 6 \cdot 9 + 3$). Do tohoto prostoru se již žádná další utěrka nevejde. Na šňůru lze uvedeným způsobem pověsit nejvýše 12 utěrek.

Z5–I–4

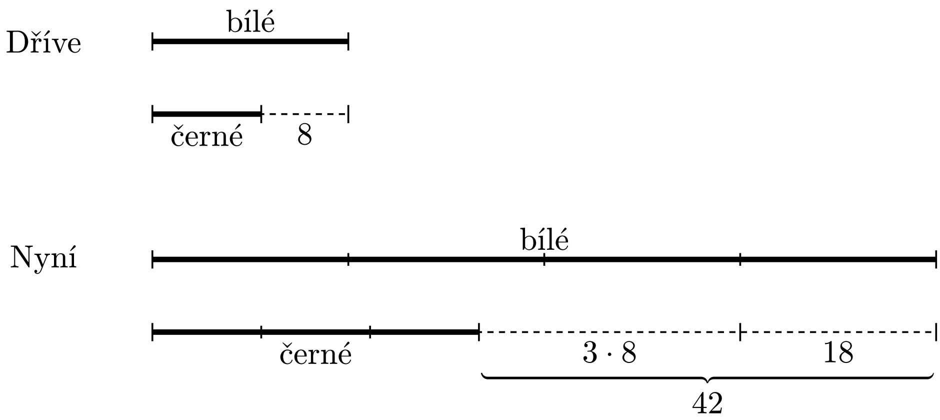
Když pan Beran zakládal chov, měl bílých ovcí o 8 více než černých. V současnosti má bílých ovcí čtyřikrát více než na začátku a černých třikrát více než na začátku. Bílých ovcí je teď o 42 více než černých. Kolik nyní pan Beran chová bílých a černých ovcí dohromady? (*L. Šimůnek*)

Nápověda. Uvažte situaci, kdy se třikrát zvětší jak počet černých, tak počet bílých ovcí.

Možné řešení. Kdyby se počáteční počty černých i bílých ovcí zvětšily třikrát, bylo by nyní bílých ovcí o 24 více než černých (neboť $3 \cdot 8 = 24$). Počet bílých ovcí se však zvětšil nikoli třikrát, ale čtyřikrát a bílých ovcí je nyní o 42 více než černých. Rozdíl $42 - 24 = 18$ odpovídá rozdílu čtyřnásobku a trojnásobku původního počtu bílých ovcí, což je právě onen původní počet. Na začátku tedy bylo 18 bílých a $18 - 8 = 10$ černých ovcí.

V současnosti pan Beran chová $4 \cdot 18 = 72$ bílých ovcí a $3 \cdot 10 = 30$ černých ovcí, což je dohromady $72 + 30 = 102$ ovcí.

Poznámka. Předchozí úvahy je možné graficky znázornit takto:

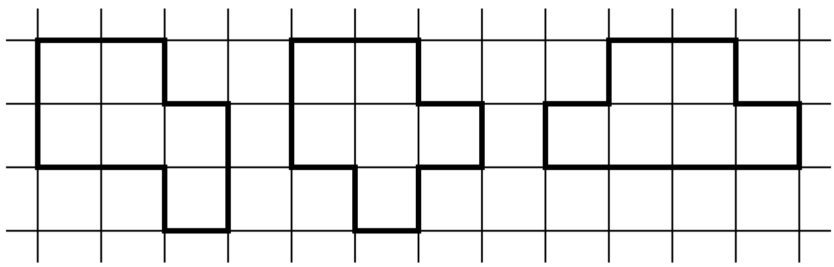


Z5–I–5

Čtvercová síť se skládá ze čtverců se stranou délky 1 cm. Narýsujte do ní alespoň tři různé obrazce takové, aby každý měl obsah $6\,\mathrm{cm}^2$ a obvod 12 cm a aby jejich strany splývaly s přímkami sítě. (*E. Semerádová*)

Nápověda. Načrtněte si nějaký útvar s obsahem $6\,\mathrm{cm}^2$ a upravujte jej tak, aby byly splněny ostatní podmínky.

Možné řešení. Jednoduchým útvarem s obsahem $6\,\mathrm{cm}^2$ je např. obdélník se stranami délek 2 cm a 3 cm. Ten má však obvod pouze 10 cm; potřebujeme přesunout část jeho plochy tak, aby se obvod o 2 cm zvětšil. To si lze v rámci zadané čtvercové sítě představit tak, že zkoušíme přesouvat jednotlivé čtverce obsažené v obdélníku na jiná místa. Několik možných řešení je na obrázku:



Poznámka. Zvídavější řešitel se může zamyslet nad dalšími, příp. všemi možnými řešeními. K tomu si stačí povšimnout, že při přesouvání dílčích čtverců myšleného obdélníku se obvod zvětší buď o 2 cm, nebo o 4 cm, a to podle toho, zda je tento čtverec rohový, nebo ne.

Z5–I–6

V nepřestupném roce bylo 53 nedělí. Na jaký den týdne připadl Štědrý den?

(*M. Volfová*)

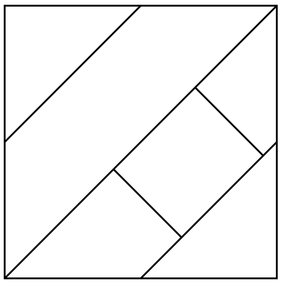
Nápověda. Zjistěte, kolik je v roce plných týdnů a kolik je dnů navíc.

Možné řešení. Nepřestupný rok má 365 dní, tj. 52 plných týdnů a jeden den navíc ($365 = 52 \cdot 7 + 1$). V 52 plných týdnech je 52 nedělí, proto musí být onen den navíc nedělí. Takový rok proto začínal i končil nedělí. Štědrý den je přesně týden před posledním dnem v roce, proto byl i Štědrý den v neděli.

I. kolo kategorie Z6

Z6–I–1

Archeologové zjistili, že vlajka bájného matematického království byla rozdělena na šest polí, tak jako na obrázku. Ve skutečnosti byla vlajka tříbarevná a každé pole bylo vybarveno jednou barvou.



Vědci už vybádali, že na vlajce byla použita červená, bílá a modrá barva, že vnitřní obdélníkové pole bylo bílé a že spolu nesousedila dvě pole stejné barvy. Určete, kolik možností vzhledu vlajky musí archeologové v této fázi výzkumu zvažovat. (*V. Hucíková*)

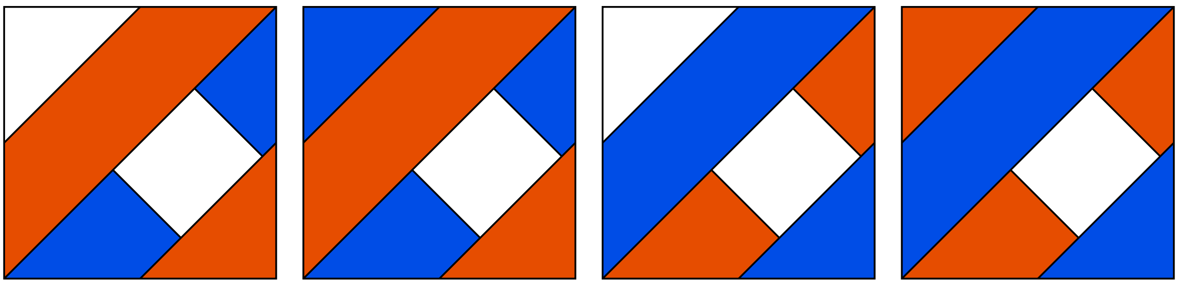
Nápověda. Začněte vybarvovat a zvažujte, kdy je následující postup jednoznačný a kdy existuje více možností.

Možné řešení. Trojúhelníkové pole sousedící s bílým obdélníkem může být buď červené, nebo modré:

Pokud by toto pole bylo červené, potom by pravoúhlé lichoběžníky musely být modré (sousedí s bílým obdélníkem a červeným trojúhelníkem) a poslední lichoběžníkové pole by muselo být červené (sousedí s bílým obdélníkem a modrými lichoběžníky). Zbylé trojúhelníkové pole by pak mohlo být buď bílé, nebo modré (sousedí s červeným lichoběžníkem).

Pokud by trojúhelníkové pole sousedící s bílým obdélníkem bylo modré, potom by příslušná diskuse byla velmi podobná předchozí, akorát by byly prohozeny barvy červená a modrá.

Celkem tedy dostáváme $2 + 2 = 4$ možnosti, které musí archeologové zvažovat.



Z6–I–2

Jiřík šel do služby k čarodějovi. Ten měl v prvním sklepě víc much než pavouků, ve druhém naopak. V každém sklepě měli mouchy a pavouci dohromady 100 nohou. Určete, kolik mohlo být much a pavouků v prvním a kolik ve druhém sklepě. (*M. Krejčová*)

Nápověda. Uvědomte si, kolik má který z tvorů nohou za předpokladu, že žádnému z nich žádná noha nechybí.

Možné řešení. Musíme zjistit, jaké počty much a pavouků dají dohromady 100 nohou. V následující tabulce postupně uvažujeme různé počty pavouků (p), určíme, kolik mají celkem nohou ($P = 8p$) a kolik nohou zbývá na mouchy ($M = 100 - P$); pokud je tento počet dělitelný šesti, dostáváme možné řešení ($m = M : 6$). Protože všechna čísla musí být kladná, stačí prozkoušet jen několik možností:

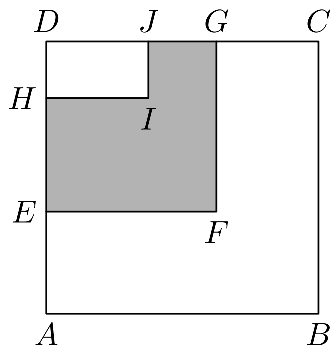
p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
M	92	84	76	68	60	52	44	36	28	20	12	4
m	–	14	–	–	10	–	–	6	–	–	2	–

Odtud vidíme čtyři možnosti: v prvním sklepě mohlo být 14 much a 2 pavouci, nebo 10 much a 5 pavouků; ve druhém sklepě mohlo být 8 pavouků a 6 much, nebo 11 pavouků a 2 mouchy.

Poznámka. Vzhledem k tomu, že všechny počty nohou jsou sudé, je možné si trochu ušetřit počítání v tabulce tím, že tyto počty dělíme dvěma. To je totéž, jako bychom počítali jenom levé (nebo jenom pravé) nohy jednotlivých tvorů. Jinými slovy, místo hledání p a m takových, aby platilo $8p + 6m = 100$, řešíme $4p + 3m = 50$.

Z6–I–3

Na obrázku je čtverec $ABCD$, čtverec $EFGD$ a obdélník $HIJD$. Body J a G leží na straně CD, přičemž platí $|DJ| < |DG|$, a body H a E leží na straně DA, přičemž platí $|DH| < |DE|$. Dále víme, že $|DJ| = |GC|$. Šestiúhelník $ABCGFE$ má obvod 96 cm, šestiúhelník $EFGJIH$ má obvod 60 cm a obdélník $HIJD$ má obvod 28 cm.



Určete obsah šestiúhelníku $EFGJIH$. (*L. Šimůnek*)

Nápověda. Dokážete určit délku některé úsečky, aniž byste k tomu použili více než jeden zadaný rozměr?

Možné řešení. Zjistíme rozměry čtverce $EFGD$ a obdélníku $HIJD$, abychom stanovili jejich obsahy. Rozdíl těchto obsahů představuje žádaný obsah šestiúhelníku $EFGJIH$.

Zadaný obvod šestiúhelníku $EFGJIH$ je roven obvodu čtverce $EFGD$, neboť $|JI| = |DH|$ a $|HI| = |DJ|$. Strana GD má tedy velikost $60 : 4 = 15\,(\mathrm{cm})$. Podobně zadaný obvod šestiúhelníku $ABCGFE$ je roven obvodu čtverce $ABCD$, velikost strany CD je tudíž $96 : 4 = 24\,(\mathrm{cm})$. Rozdíl délek stran těchto dvou čtverců je roven délce úsečky GC, která je dle zadání rovna délce úsečky DJ:

$$|DJ| = |GC| = 24 - 15 = 9\,(\mathrm{cm}).$$

Pomocí známého obvodu obdélníku $HIJD$ a délky strany DJ stanovíme i druhý rozměr tohoto obdélníku:

$$|JI| = (28 - 2 \cdot 9) : 2 = 5\,(\mathrm{cm}).$$

Nyní máme všechny údaje potřebné ke stanovení obsahů čtverce $EFGD$ a obdélníku $HIJD$:

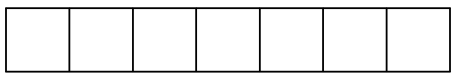
$$S_{EFGD} = 15 \cdot 15 = 225\,(\mathrm{cm}^2), \quad S_{HIJD} = 9 \cdot 5 = 45\,(\mathrm{cm}^2).$$

Hledaný obsah šestiúhelníku tedy je

$$S_{EFGJIH} = 225 - 45 = 180\,(\mathrm{cm}^2).$$

Z6–I–4

Na obrázku je obdélník rozdělený na 7 políček. Na každé políčko se má napsat právě jedno z čísel 1, 2 a 3.



Mirek tvrdí, že to lze provést tak, aby součet dvou vedle sebe napsaných čísel byl pokaždé jiný. Zuzka naopak tvrdí, že to není možné. Rozhodněte, kdo z nich má pravdu.

(*V. Hucíková*)

Nápověda. Zjistěte, které různé součty lze získat.

Možné řešení. Všechny možné dvojice, které lze z daných čísel složit, jsou

$$(1{,}1);\ (1{,}2), (2{,}1);\ (1{,}3), (2{,}2), (3{,}1);\ (2{,}3), (3{,}2);\ (3{,}3).$$

Tyto možnosti dávají 5 různých součtů, a to 2, 3, 4, 5, 6 (dvojice s různými součty jsou odděleny středníky). Na uvedeném obrázku však potřebujeme 6 dvojic s různými součty, pravdu má tedy Zuzka.

Poznámka. a) K určení možných součtů není třeba vypisovat všechny přípustné dvojice: nejmenší součet odpovídá $1 + 1 = 2$, největší je $3 + 3 = 6$. Odtud plyne, že možných součtů není víc než 5, což je méně než požadovaných 6.

b) Řešení úlohy pomocí všech možných vyplnění tabulky a kontrolou takto získaných součtů je extrémně pracné. Pokud by však takové řešení bylo úplné, nechť je považováno za správné.

Z6–I–5

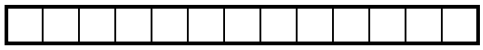
Pan Cuketa měl obdélníkovou zahradu, jejíž obvod byl 28 metrů. Obsah celé zahrady vyplnily právě čtyři čtvercové záhony, jejichž rozměry v metrech byly vyjádřeny celými čísly.

Určete, jaké rozměry mohla mít zahrada. Najděte všechny možnosti. (*L. Hozová*)

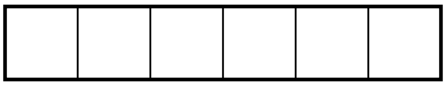
Nápověda. Uvědomte si, že čtverce nemusí mít stejné rozměry.

Možné řešení. Obvod $28 = 2 \cdot 14$ metrů lze pomocí kladných celých čísel vyjádřit pouze několika málo způsoby. Postupně všechny probereme a zjistíme, zda lze odpovídající záhon rozdělit na čtyři čtverce s celočíselnými rozměry:

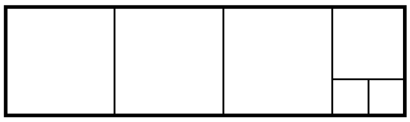
- $28 = 2 \cdot (13 + 1)$, v takovém případě potřebujeme 13 čtverců:



- $28 = 2 \cdot (12 + 2)$, v takovém případě potřebujeme nejméně 6 čtverců:

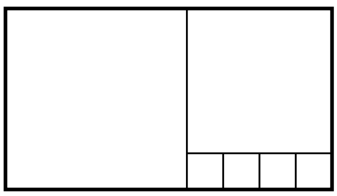


- $28 = 2 \cdot (11 + 3)$, v takovém případě potřebujeme nejméně 6 čtverců:

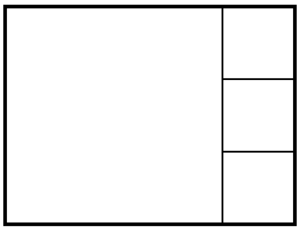


- $28 = 2 \cdot (10 + 4)$, v takovém případě stačí 4 čtverce:

- $28 = 2 \cdot (9 + 5)$, v takovém případě potřebujeme nejméně 6 čtverců:



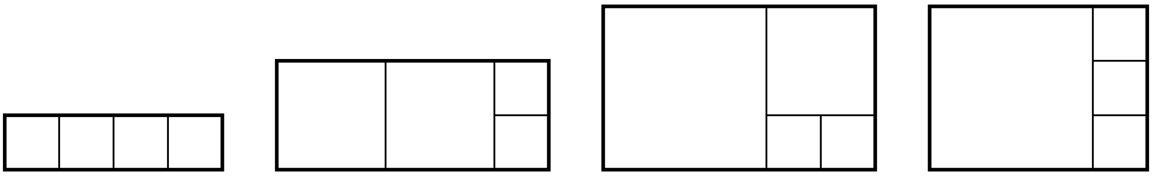
- $28 = 2 \cdot (8 + 6)$, v takovém případě stačí 4 čtverce:



- $28 = 2 \cdot (7 + 7)$, v takovém případě by byl záhon čtvercový a ne obdélníkový.

  Zahrada mohla mít rozměry 10×4 nebo 8×6 metrů.

Jiné řešení. Uvažujme, jak lze složit jeden obdélník ze čtyř čtverců (obecně různých celočíselných rozměrů). To lze udělat pouze následujícími způsoby:



Pokud velikost strany nejmenšího čtverce v metrech označíme a, potom obvod obdélníku v jednotlivých případech je:

- $2 \cdot (4a + a) = 10a$, což není rovno 28 pro žádné celé a.
- $2 \cdot (5a + 2a) = 14a$, což je rovno 28, právě když $a = 2$; obdélník má v takovém případě rozměry 10×4 metrů.
- $2 \cdot (5a + 3a) = 16a$, což není rovno 28 pro žádné celé a.
- $2 \cdot (4a + 3a) = 14a$, což je rovno 28, právě když $a = 2$; obdélník má v takovém případě rozměry 8×6 metrů.

Z6–I–6

V zámecké kuchyni připravují nudlovou polévku v hrncích a kotlích. V pondělí uvařili 25 hrnců a 10 kotlů polévky. V úterý uvařili 15 hrnců a 13 kotlů. Ve středu uvařili 20 hrnců a ve čtvrtek 30 kotlů. Přitom v pondělí a v úterý uvařili stejné množství polévky.

Kolikrát víc polévky uvařili ve čtvrtek než ve středu? (*K. Pazourek*)

Nápověda. Zjistěte, jak se lišily počty hrnců, resp. kotlů polévky uvařených v pondělí a úterý.

Možné řešení. V pondělí uvařili o 10 hrnců polévky více než v úterý, zatímco v úterý uvařili o 3 kotle více než v pondělí. Protože v tyto dny uvařili stejné množství polévky, má 10 hrnců tentýž objem jako 3 kotle.

Ve středu uvařili $20 = 2 \cdot 10$ hrnců polévky, což odpovídá $2 \cdot 3 = 6$ kotlům. Ve čtvrtek pak uvařili $30 = 5 \cdot 6$ kotlů polévky, což je pětkrát víc než ve středu.

I. kolo kategorie Z7

Z7–I–1

Myška Hryzka našla 27 stejných krychliček sýra. Nejdříve si z nich poskládala velkou krychli a chvíli počkala, než se sýrové krychličky k sobě přilepily. Potom z každé stěny velké krychle vyhryzla střední krychličku. Poté snědla i krychličku, která byla ve středu velké krychle. Zbytek sýra chce Hryzka spravedlivě rozdělit svým čtyřem mláďatům, a proto ho chce rozřezat na čtyři kusy stejného tvaru i velikosti. Řezat bude jen podél stěn krychliček a nic k sobě už lepit nebude.

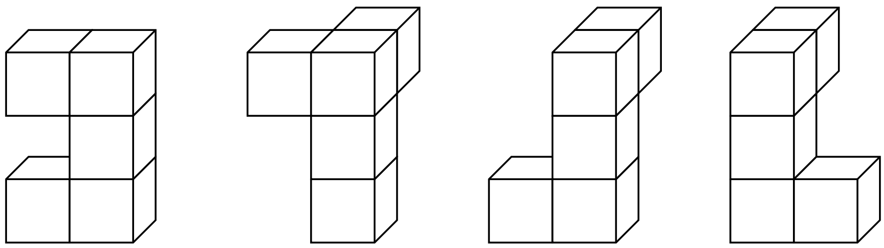
Jaký tvar mohou mít kusy sýra pro mláďata? Najděte alespoň dvě možnosti.

(*V. Hucíková*)

Nápověda. Určete, kolik sýra dostane každé z mláďat.

Možné řešení. Původní krychle byla složena z 27 krychliček. Hryzka vykousla po jedné krychličce z každé stěny a jednu prostřední, prohryzaná krychle tedy obsahovala $27 - 6 - 1 = 20$ krychliček. Každé ze čtyř mláďat tedy dostane $20 : 4 = 5$ krychliček sýra.

Nyní je potřeba představovat si různé útvary složené z 5 krychliček tak, aby ze čtyř takových útvarů bylo možné složit prohryzanou krychli. Zde jsou všechna řešení:



Z7–I–2

Vlčkovi mají 4 děti. Ondra je o 3 roky starší než Matěj a Kuba o 5 let starší než nejmladší Jana. Víme, že je jim dohromady 30 let a před 3 lety jim bylo dohromady 19 let. Určete, jak jsou děti staré.

(*M. Volfová*)

Nápověda. Zaměřte na součet věků sourozenců před třemi lety.

Možné řešení. Označíme aktuální stáří dětí v letech počátečními písmeny jejich jmen a takto postupně vyjádříme všechny vztahy ze zadání:

$$o = m + 3, \quad k = j + 5, \quad o + m + k + j = 30,$$

odkud po dosazení dostáváme

$$\begin{aligned}(m+3) + m + (j+5) + j = 2m + 2j + 8 &= 30,\\ 2m + 2j &= 22,\\ m + j &= 11.\end{aligned}$$

Zároveň má platit, že před třemi lety bylo dětem dohromady 19 let. Ovšem rozdíl $30 - 19 = 11$ není násobkem 3, takže tušíme nějaký problém. Vzhledem k tomu, že $11 = 3 \cdot 3 + 2$, znamená to, že nejmladší Jana nebyla před třemi lety ještě na světě a nyní má 2 roky. Z předchozích vztahů postupně odvozujeme:

$$m = 11 - j = 9, \quad k = j + 5 = 7, \quad o = m + 3 = 12.$$

Stáří dětí Vlčkových je tedy následující: Ondrovi je 12 let, Matějovi 9, Kubovi 7 a Janě 2 roky.

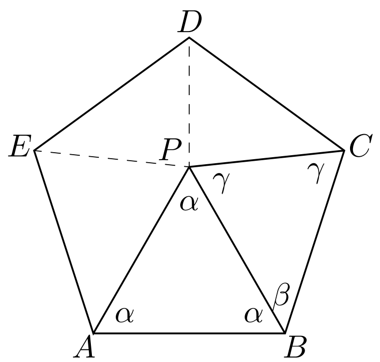
Poznámka. Pokud rovnou neodhalíme, že $j = 2$, můžeme jakoukoli jinou možnost vyloučit obdobným dosazením jako výše a porovnáním s požadovaným součtem před třemi lety. Vzhledem k tomu, že $m + j = 11$ a že Jana je nejmladší, stačí prozkoušet následující možnosti: $j = 1,2,3,4$ a 5.

Z7–I–3

Uvnitř pravidelného pětiúhelníku $ABCDE$ je bod P takový, že trojúhelník ABP je rovnostranný. Jak velký je úhel BCP? (*L. Hozová*)

Nápověda. Uvědomte si, že trojúhelník BCP není obecný.

Možné řešení. Pětiúhelník $ABCDE$ je pravidelný, zejména platí $|AB| = |BC|$. Trojúhelník ABP je rovnostranný, zejména platí $|AB| = |BP|$. Odtud vidíme, že $|BP| = |BC|$, tedy, že trojúhelník BCP je rovnoramenný. Jeho vnitřní úhly u vrcholů P a C jsou proto shodné; k jejich určení stačí znát úhel u vrcholu B (součet velikostí vnitřních úhlů v libovolném trojúhelníku je 180°). Přitom úhel PBC je rozdílem úhlů ABC a ABP, z nichž první je vnitřním úhlem pravidelného pětiúhelníku (vyjádříme záhy) a druhý je vnitřním úhlem rovnostranného trojúhelníku (má velikost $\alpha = 60°$).



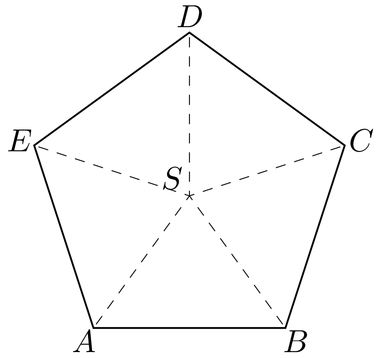
Pětiúhelník $ABCDE$ můžeme rozdělit na pět trojúhelníků se společným vrcholem P. Součet vnitřních úhlů pětiúhelníku je roven součtu vnitřních úhlů všech pěti trojúhelníků vyjma úhlů u vrcholu P, tj. $5 \cdot 180° - 360° = 540°$. V pravidelném pětiúhelníku jsou všechny vnitřní úhly shodné, každý má tudíž velikost $540° : 5 = 108°$.

Odtud konečně umíme vyjádřit

$$\beta = |\sphericalangle PBC| = |\sphericalangle ABC| - |\sphericalangle ABP| = 108° - 60° = 48°$$

a následně
$$\gamma = |\sphericalangle BCP| = |\sphericalangle BPC| = \frac{180^\circ - 48^\circ}{2} = \frac{132^\circ}{2} = 66^\circ.$$
Velikost úhlu BCP je 66°.

Poznámka. Velikost vnitřního úhlu pravidelného pětiúhelníku je možné odvodit také pomocí rozdělení na pět shodných rovnoramenných trojúhelníků jako na následujícím obrázku (S je střed pětiúhelníku, tj. střed jemu opsané kružnice).



Úhel u vrcholu S v každém z těchto trojúhelníků má velikost $360 : 5 = 72^\circ$; součet úhlů u základny je roven $180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$, což je také velikost vnitřního úhlu pravidelného pětiúhelníku.

Z7–I–4

V robotí škole do jedné třídy chodí dvacet robotů Robertů, kteří jsou očíslováni Robert 1 až Robert 20. Ve třídě je zrovna napjatá atmosféra, mluví spolu jen někteří roboti. Roboti s lichým číslem nemluví s roboty se sudým číslem. Mezi Roberty s lichým číslem spolu mluví pouze roboti, kteří mají číslo se stejným počtem číslic. Roberti se sudým číslem se baví pouze s těmi, jejichž číslo začíná stejnou číslicí.

Kolik dvojic robotů Robertů se může spolu vzájemně bavit? (*K. Pazourek*)

Nápověda. Nejdřív rozdělte roboty do skupin, v rámci nichž se mohou vzájemně bavit.

Možné řešení. Nejprve vyjádříme všechny skupiny robotů, kteří se mohou mezi sebou bavit (v následujících výčtech jsou tyto skupiny vyznačeny závorkami). Roboti s lichými čísly jsou rozděleni podle počtu číslic, to jsou dvě skupiny:

$$(1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9),\ (11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19).$$

Roboti se sudými čísly jsou rozděleni podle počáteční číslice:

$$(2,\ 20),\ (4),\ (6),\ (8),\ (10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18).$$

Stačí tedy spočítat počty dvojic, které lze v rámci každé skupiny vytvořit. Máme tři skupiny s jediným robotem — v nich nevytvoříme žádnou dvojici; jednu skupinu se dvěma roboty — v té máme jedinou dvojici; tři skupiny po pěti robotech — v každé takové skupině lze vytvořit 10 dvojic. Celkem dostáváme $1 + 3 \cdot 10 = 31$ dvojic robotů, kteří se spolu mohou bavit.

Z7–I–5

V kocourkovské škole používají zvláštní číselnou osu. Vzdálenost mezi čísly 1 a 2 je 1 cm, vzdálenost mezi čísly 2 a 3 je 3 cm, mezi čísly 3 a 4 je 5 cm a tak dále: vzdálenost mezi každou následující dvojicí přirozených čísel se vždy zvětší o 2 cm.

Mezi kterými dvěma přirozenými čísly je na kocourkovské číselné ose vzdálenost 39 cm? Najděte všechny možnosti. (*K. Pazourek*)

Nápověda. Vypište si vzdálenosti mezi různými dvojicemi čísel na kocourkovské ose.

Možné řešení. Vzdálenost 39 cm může být realizována mezi různými dvojicemi čísel. Budeme systematicky vypisovat vzdálenosti mezi několika prvními čísly kocourkovské osy. V následujícím schématu je nad čarou vypsáno prvních 10 čísel a pod čarou skutečné vzdálenosti (v cm) mezi různými dvojicemi těchto čísel — na prvním řádku pod čarou jsou postupně vzdálenosti mezi sousedními čísly, na druhém řádku pod čarou jsou vzdálenosti mezi dvojicemi čísel, které jsou ob jedno, atd. (Např. 21 na třetím řádku pod čarou značí skutečnou vzdálenost mezi čísly 3 a 6 na kocourkovské ose a je určeno jako $5 + 7 + 9$). Hvězdičkou jsou označena zbytečně velká čísla, která nás nezajímají.

1		2		3		4		5		6		7		8		9		10
	1		3		5		7		9		11		13		15		17	
		4		8		12		16		20		24		28		32		36
			9		15		21		27		33		**39**		*		*	
				16		24		32		40		*		*		*		*
					25		35		45		*		*		*		*	
						36		48		*		*		*		*		*
							49		*		*		*		*		*	

Ihned vidíme (z třetího řádku pod čarou), že vzdálenost 39 cm je mezi čísly 6 a 9 a že se jistě neobjevuje mezi čísly, která jsou na kocourkovské ose víc než ob dvě (od čtvrtého řádku pod čarou). Vzdálenost 39 cm se určitě také nemůže objevovat mezi čísly, která jsou ob jedno, protože všechny tyto vzdálenosti jsou sudé (druhý řádek pod čarou). Zbývá tedy prozkoumat vzdálenosti mezi sousedními čísly (první řádek pod čarou):

Posloupnost vzdáleností mezi sousedními čísly můžeme vyjádřit jako

$$1, \quad 3 = 1 + 2, \quad 5 = 1 + 2 \cdot 2, \quad 7 = 1 + 2 \cdot 3, \quad 9 = 1 + 2 \cdot 4, \quad \ldots$$

Obecně, vzdálenost mezi i-tým a $(i + 1)$-ním číslem na kocourkovské ose je rovna

$$1 + 2(i - 1) = 2i - 1\,(\mathrm{cm}).$$

Tato vzdálenost tedy bude rovna 39 cm, právě když $i = 20$.

Vzdálenost 39 cm na kocourkovské číselné ose je mezi dvojicemi čísel 6, 9 a 20, 21.

Poznámky. a) Závěrečnou úvahu lze nahradit vypsáním a spočítáním všech lichých čísel až po 39. Pokud je výčet úplný, je takové řešení správné.

b) Naopak úvodní vypisování lze celé nahradit úvahou, příp. výpočtem: Všechny vzdálenosti v tabulce jsou součtem různých počtů lichých čísel, přičemž tyto počty jsou buď liché (pro sousední čísla a dvojice čísel, která jsou ob sudý počet čísel), nebo sudé (pro dvojice čísel, která jsou ob lichý počet čísel). Na jednotlivých řádcích se tedy objevují buď jenom lichá, nebo jenom sudá čísla. Vzdálenost 39 cm se tedy může objevovat pouze mezi sousedními čísly a dvojicemi, která jsou na kocourkovské ose ob sudý počet čísel.

Předchozí vypisování posloupnosti vzdáleností mezi sousedními čísly má následující analogii pro dvojice čísel, která jsou ob dvě:

$$9, \quad 15 = 9 + 6, \quad 21 = 9 + 6 \cdot 2, \quad 27 = 9 + 6 \cdot 3, \quad \dots$$

Obecně, vzdálenost mezi i-tým a $(i+3)$-tím číslem na kocourkovské ose je rovna

$$9 + 6(i - 1) = 6i + 3\,(\mathrm{cm}).$$

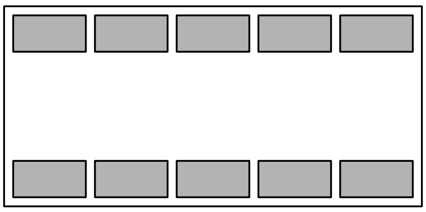
Tato vzdálenost tedy bude rovna 39 cm, právě když $i = 6$. Obdobně lze vyjádřit jakoukoli jinou výše vypisovanou posloupnost.

c) Řešení úlohy lze zjednodušit pomocí následujícího poznatku: Součet lichého počtu po sobě jdoucích lichých čísel je roven součinu počtu těchto čísel a prostředního z nich. Zvídavým řešitelům doporučujeme tento poznatek zdůvodnit a řešení domyslet.

d) V uvedeném schématu si můžeme všimnout, že všechna čísla v prvním šikmém sloupci jsou druhými mocninami přirozených čísel. To není náhoda — obecně platí, že součet prvních k po sobě jdoucích lichých čísel je roven k^2. Zvídavým řešitelům doporučujeme porovnat toto tvrzení s poznatkem v předchozí poznámce.

Z7–I–6

Na výstavě dlouhosrstých koček se sešlo celkem deset vystavujících. Vystavovalo se v obdélníkové místnosti, ve které byly dvě řady stolů jako na obrázku.



Kočky byly označeny navzájem různými čísly v rozmezí 1 až 10 a na každém stole seděla jedna kočka. Určete, která kočka byla na výstavě hodnocena nejlépe, pokud víte, že:

a) součet čísel koček sedících naproti sobě byl vždy stejný,
b) součet čísel každých dvou koček sedících vedle sebe byl sudý,
c) součin čísel každých dvou koček sedících vedle sebe v dolní řadě je násobek čísla 8,
d) kočka číslo 1 není na kraji a je víc vpravo než kočka číslo 6,
e) vyhrála kočka sedící v pravém dolním rohu. (*M. Mach*)

Nápověda. Může proti sobě, příp. vedle sebe sedět kočka se sudým a kočka s lichým číslem?

Možné řešení. Postupně rozebereme důsledky jednotlivých poznatků ze zadání:

a) Čísla koček sedících proti sobě tvoří 5 párů se stejným součtem. Součet čísel všech koček je $1 + 2 + \ldots + 10 = 55$, takže každý pár musí mít součet $55 : 5 = 11$; jediné možnosti jsou $1 + 10$, $2 + 9$, $3 + 8$, $4 + 7$, $5 + 6$.

b) Sudé číslo nelze získat součtem sudého a lichého čísla. V jedné řadě proto mohou sedět pouze kočky s lichými čísly, ve druhé pouze kočky se sudými čísly.

c) Násobek čísla 8 nelze získat součinem lichých čísel. Odtud a z předchozího důsledku plyne, že v dolní řadě seděly pouze kočky se sudými čísly, tj. 2, 4, 6, 8, 10. Součinem dvou takových čísel lze získat násobek 8, právě když jeden ze součinitelů je 4 nebo 8. Proto nemohou být kočky s čísly 4 a 8 na krajích, ani uprostřed.

d) Podle důsledku a) víme, že proti kočce s číslem 1 seděla kočka s číslem 10. Odtud plyne, že také kočka s číslem 10 nemůže být na kraji a je víc vpravo než kočka s číslem 6.

e) Z dosavadních informací víme, že v pravém dolním rohu seděla kočka se sudým číslem různým od 4, 8, 10 a 6.

   Vyhrála tedy kočka s číslem 2.

Poznámka. Z uvedeného téměř umíme určit rozmístění všech koček v místnosti: pořadí koček ve spodní řadě mohlo být

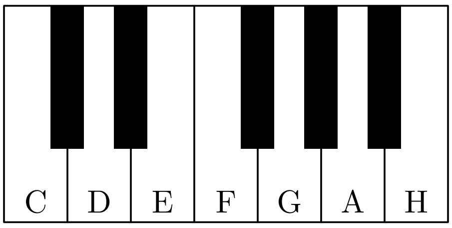
$$\text{buď} \quad 6,\ 4,\ 10,\ 8,\ 2, \quad \text{nebo} \quad 6,\ 8,\ 10,\ 4,\ 2,$$

pořadí koček v horní řadě je pak jednoznačně určeno podle důsledku a).

I. kolo kategorie Z8

Z8–I–1

Míša měl na poličce malé klávesy, které vidíte na obrázku. Na bílých klávesách byly vyznačeny jejich tóny.



Klávesy našla malá Klára. Když je brala z poličky, vypadly jí z ruky a všechny bílé klávesy se z nich vysypaly. Aby se bratr nezlobil, začala je Klára skládat zpět. Všimla si přitom, že se daly vložit jen na některá místa, neboť jim překážely černé klávesy umístěné přesně doprostřed mezi dvě bílé.

Kláře se podařilo klávesy nějak složit, avšak tóny na nich byly pomíchané, protože ještě neznala hudební stupnici. Zjistěte, kolika způsoby mohla Klára klávesy poskládat. (*E. Novotná*)

Nápověda. Které klávesy mohla Klára zaměnit a které nikoli?

Možné řešení. Rozsypané, tzn. bílé klávesy jsou trojího typu:

1. klávesy C a F, které mají černou klávesu zprava,
2. klávesy E a H, které mají černou klávesu zleva,
3. klávesy D, G a A, které mají černé klávesy z obou stran.

Je zřejmé, že Klára mohla poplést vždy jen klávesy stejného typu. Klávesy prvního typu mohla poskládat dvojím způsobem:

$$\mathrm{C} * * \mathrm{F} * * *, \quad \mathrm{F} * * \mathrm{C} * * *.$$

Klávesy druhého typu mohla poskládat také dvojím způsobem:

$$* * \mathrm{E} * * * \mathrm{H}, \quad * * \mathrm{H} * * * \mathrm{E}.$$

Klávesy třetího typu mohla poskládat šesti způsoby:

$$\begin{aligned} &* \mathrm{D} * * \mathrm{G}\,\mathrm{A} *, \quad * \mathrm{D} * * \mathrm{A}\,\mathrm{G} *,\\ &* \mathrm{G} * * \mathrm{A}\,\mathrm{D} *, \quad * \mathrm{G} * * \mathrm{D}\,\mathrm{A} *,\\ &* \mathrm{A} * * \mathrm{D}\,\mathrm{G} *, \quad * \mathrm{A} * * \mathrm{G}\,\mathrm{D} *. \end{aligned}$$

Uvedené tři skupiny možných skládání jsou na sobě zcela nezávislé. Proto je celkový počet možností, jak mohla Klára klávesy poskládat, roven $2 \cdot 2 \cdot 6 = 24$.

Z8–I–2

Na louce se pasou koně, krávy a ovce, dohromady jich je méně než 200. Kdyby bylo krav 45krát víc, koní 60krát víc a ovcí 35krát víc, než kolik jich je nyní, jejich počty by se rovnaly. Kolik se na louce pase koní, krav a ovcí dohromady? (*M. Krejčová*)

Nápověda. Jaké jsou poměry stávajících počtů jednotlivých druhů zvířat?

Možné řešení. Poměr mezi stávajícím počtem krav a koní je

$$60 : 45 = 4 : 3$$

a poměr mezi stávajícím počtem ovcí a koní je

$$60 : 35 = 12 : 7.$$

Počet koní tedy musí být nějakým násobkem čísla 3 a současně čísla 7, tedy násobkem čísla 21.

Kdyby na louce bylo 21 koní, potom by tam bylo $21 \cdot 4 : 3 = 28$ krav a $21 \cdot 12 : 7 = 36$ ovcí, celkem tedy $21+28+36 = 85$ zvířat. Kdyby na louce bylo 42 koní, potom by všechny počty byly dvojnásobné, celkem tedy $2 \cdot 85 = 170$ zvířat. Kdyby na louce bylo 63 koní, potom by všechny počty byly trojnásobné, celkem tedy $3 \cdot 85 = 255$ zvířat, což je ovšem víc než 200.

Na louce se tedy páslo buď 85, nebo 170 zvířat.

Poznámka. K témuž výsledku lze dojít také rozkladem daných násobků na součiny prvočísel:

$$45 = 3 \cdot 3 \cdot 5, \quad 60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5, \quad 35 = 5 \cdot 7.$$

Aby se odpovídající násobky počtů jednotlivých zvířat rovnaly, musí být v jejich prvočíselných rozkladech zastoupena všechna předchozí prvočísla (včetně jejich násobností). Nejmenší možný počet krav tedy je $2 \cdot 2 \cdot 7 = 28$, koní $3 \cdot 7 = 21$ a ovcí $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$, celkem $28 + 21 + 36 = 85$ zvířat.

Z8–I–3

Je dán rovnoramenný lichoběžník $ABCD$, v němž platí

$$|AB| = 2|BC| = 2|CD| = 2|DA|.$$

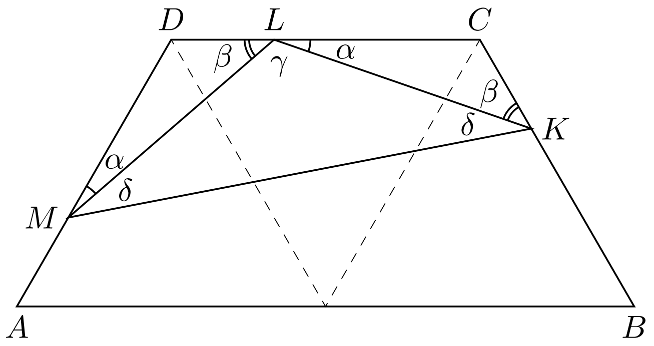
Na jeho straně BC je bod K takový, že $|BK| = 2|KC|$, na jeho straně CD je bod L takový, že $|CL| = 2|LD|$, a na jeho straně DA je bod M takový, že $|DM| = 2|MA|$.

Určete velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku KLM. (*J. Zhouf*)

Nápověda. Zaměřte se nejprve na vnitřní úhly lichoběžníku $ABCD$.

Možné řešení. Z předpokladů plyne, že spojnice středu úsečky AB s vrcholy C a D rozděluje lichoběžník $ABCD$ na tři shodné rovnostranné trojúhelníky. Proto velikosti vnitřních úhlů v lichoběžníku u vrcholů A a B jsou rovny $60°$ a u vrcholů C a D jsou $120°$.

Ze zadání dále plyne, že trojúhelníky LCK a MDL jsou shodné (podle věty *sus*). Proto také úsečky KL a LM a vyznačené dvojice úhlů jsou shodné; velikosti těchto úhlů označíme α a β. Trojúhelník KLM je rovnoramenný a úhly u základny jsou taktéž shodné; jejich velikost označíme δ a velikost úhlu KLM označíme γ.



Ze součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku KCL odvodíme

$$\alpha + \beta = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Součet tří vyznačených úhlů s vrcholem L je přímý úhel, tudíž

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 120^\circ.$$

Konečně, ze součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku KLM odvodíme

$$\delta = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ.$$

Velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku KLM jsou 30° a 120°.

Z8–I–4

V komoře, kde se rozbilo světlo a vše z ní musíme brát poslepu, máme ponožky čtyř různých barev. Chceme-li si být jisti, že vytáhneme alespoň dvě bílé ponožky, musíme jich z komory přinést 28. Abychom měli takovou jistotu pro šedé ponožky, musíme jich přinést také 28, pro černé ponožky stačí 26 a pro modré ponožky 34.

Kolik je celkem v komoře ponožek? (*E. Semerádová*)

Nápověda. Kolik je v komoře nebílých, nešedých, nečerných, resp. nemodrých ponožek?

Možné řešení. Pokud vytáhneme nejdříve všechny nebílé ponožky a teprve potom dvě bílé, vytáhneme právě 28 ponožek. Nebílých ponožek je tedy 26. Stejnou úvahou dospějeme k tomu, že nešedých ponožek je také 26, nečerných je 24 a nemodrých je 32.

Nebílé ponožky zahrnují ponožky ostatních tří barev; naopak bílé ponožky jsou zahrnuty mezi nešedými, nečernými a nemodrými. Podobně je tomu s ostatními případy. Součet všech nebílých, nešedých, nečerných a nemodrých ponožek je proto roven trojnásobku počtu všech ponožek v komoře. Tento součet je $26 + 26 + 24 + 32 = 108$, v komoře je tedy $108 : 3 = 36$ ponožek.

Poznámka. a) Z výsledného součtu a z předchozích pozorování lze snadno odvodit počty ponožek jednotlivých barev (např. bílých ponožek je $36 - 26 = 10$).

b) Pokud počty ponožek jednotlivých barev označíme počátečními písmeny oněch barev, potom předchozí myšlenky můžeme zapsat takto:

$$\begin{aligned} š + č + m &= 26, \\ b + č + m &= 26, \\ b + š + m &= 24, \\ b + š + č &= 32, \end{aligned}$$

odkud sečtením dostáváme

$$3(b + š + č + m) = 108,$$

odkud po dělení třemi plyne

$$b + š + č + m = 36.$$

Z8–I–5

Číslo dne je pořadové číslo daného dne v příslušném měsíci (tedy např. číslo dne 5. srpna 2016 je 5). Ciferný součet dne je součet hodnot všech číslic v datu tohoto dne (tedy např. ciferný součet dne 5. srpna 2016 je $5 + 8 + 2 + 0 + 1 + 6 = 22$). Šťastný den je takový den, jehož číslo dne je rovno cifernému součtu dne.

Určete, kolik šťastných dní je v roce 2016 a které dny to jsou. (*L. Růžičková*)

Nápověda. Vyjádřete definici šťastného dne pomocí rovnice.

Možné řešení. Číslo dne je nejvýše dvojmístné číslo v rozmezí od 1 do 31, které označíme $10a+b$; číslice a může být 0, 1, 2, nebo 3. Číslo měsíce je nejvýše dvojmístné číslo v rozmezí od 1 do 12, které označíme $10c + d$; číslice c může být buď 0, nebo 1. Při tomto značení je šťastný den takový, že platí

$$\begin{aligned} 10a + b &= a + b + c + d + 2 + 0 + 1 + 6, \\ 9(a - 1) &= c + d. \end{aligned}$$

Odtud plyne, že b může být libovolné, a musí být buď 2, nebo 3 (a součet $c+d$ je dělitelný 9).

- Pokud $a = 2$, potom $c + d = 9$, což znamená, že $c = 0$ a $d = 9$.
- Pokud $a = 3$, potom $c + d = 18$, což vzhledem k výše formulovaným omezením nemá vyhovující řešení.

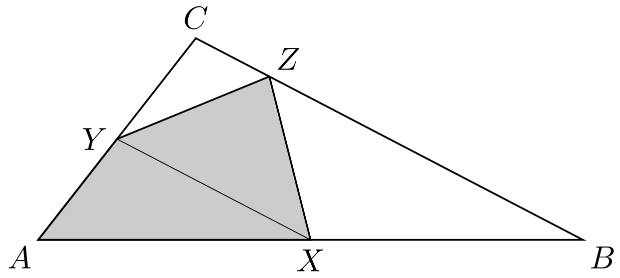
Všechny šťastné dny jsou tedy v měsíci září, a to od 20. do 29., celkem 10 dní.

Z8–I–6

Katka narýsovala trojúhelník ABC. Střed strany AB si označila jako X a střed strany AC jako Y. Na straně BC chce najít takový bod Z, aby obsah čtyřúhelníku $AXZY$ byl co největší. Jakou část trojúhelníku ABC může maximálně zabírat čtyřúhelník $AXZY$? (*A. Bohiniková*)

Nápověda. Určete, jakou část trojúhelníku ABC zabírá trojúhelník AXY.

Možné řešení. Ze zadání plyne, že úsečka XY je střední příčkou trojúhelníku ABC, která je rovnoběžná se stranou BC. Její délka je tedy poloviční vzhledem k délce strany BC a velikost výšky z bodu A na XY je taktéž poloviční vzhledem k velikosti výšky z téhož bodu na BC. To znamená, že trojúhelník AXY má čtvrtinový obsah vzhledem k obsahu trojúhelníku ABC.



Nyní zvolme bod Z na straně BC. Protože úsečky BC a XY jsou rovnoběžné, je obsah trojúhelníku XYZ, tedy i čtyřúhelníku $AXZY$ stejný pro jakkoli zvolený bod Z. Protože vzdálenost rovnoběžek BC a XY je stejná jako vzdálenost XY od vrcholu A, mají trojúhelníky AXY a XYZ tutéž velikost výšky na jejich společnou stranu XY, a proto mají tentýž obsah. Každý z těchto dvou trojúhelníků zabírá čtvrtinu trojúhelníku ABC, čtyřúhelník $AXZY$ proto zabírá polovinu trojúhelníku ABC.

I. kolo kategorie Z9

Z9–I–1

Objem vody v městském bazénu s obdélníkovým dnem je 6 998,4 hektolitrů. Propagační leták uvádí, že kdybychom chtěli všechnu vodu z bazénu přelít do pravidelného čtyřbokého hranolu s podstavnou hranou rovnající se průměrné hloubce bazénu, musel by být hranol vysoký jako blízký televizní vysílač a pak by byl naplněný až po okraj.

Dodáváme, že kdybychom chtěli uplavat vzdálenost stejnou, jako je výška vysílače, museli bychom přeplavat buď osm délek, nebo patnáct šířek bazénu. Jak vysoký je vysílač?

(*L. Šimůnek*)

Nápověda. Odvoďte nejprve vztah mezi výškou vysílače a průměrnou hloubkou bazénu.

Možné řešení. Všechny délky budeme vyjadřovat v metrech, a to při tomto značení: $h =$ průměrná hloubka bazénu, $d =$ délka bazénu, $š =$ šířka bazénu, $v =$ výška vysílače. Objem bazénu proto vyjádříme v metrech krychlových: $6998{,}4\,\mathrm{hl} = 699{,}84\,\mathrm{m}^3$. Informace v zadání lze zapsat následujícími rovnicemi:

$$699{,}84 = h \cdot š \cdot d = v \cdot h^2, \tag{1}$$

$$v = 8d = 15š. \tag{2}$$

Z rovností (2) můžeme vyjádřit $d = \frac{v}{8}$ a $š = \frac{v}{15}$. Po dosazení do jedné z rovností v (1), vydělení h, resp. v (jež jsou jistě nenulové) a úpravě dostáváme:

$$\begin{aligned} h \cdot \frac{v}{15} \cdot \frac{v}{8} &= v \cdot h^2, \\ \frac{v}{120} &= h, \\ v &= 120h. \end{aligned}$$

Tento vztah dosadíme do jiné rovnosti v (1) a zjistíme hodnotu neznámé h:

$$\begin{aligned} 699{,}84 &= 120h \cdot h^2, \\ 5{,}832 &= h^3, \\ h &= 1{,}8. \end{aligned}$$

Vysílač je vysoký $v = 120 \cdot 1{,}8 = 216$ metrů.

Z9–I–2

Úžasným číslem nazveme takové sudé číslo, jehož rozklad na součin prvočísel má právě tři ne nutně různé činitele a součet všech jeho dělitelů je roven dvojnásobku tohoto čísla. Najděte všechna úžasná čísla. (*M. Mach*)

Nápověda. Kolik nejvíce dělitelů může mít číslo, které je součinem tří ne nutně různých prvočísel?

Možné řešení. Protože úžasné číslo je sudé, alespoň jeden z jeho prvočíselných dělitelů je 2; zbylé dva prvočíselné dělitele označíme b a c. Úžasné číslo je tedy rovno součinu $2bc$. Všichni dělitelé takového čísla jsou 1, 2, b, c, $2b$, $2c$, bc, $2bc$, přičemž některá z těchto čísel se mohou rovnat. Postupně probereme všechny možnosti podle počtu a typu různých prvočíselných dělitelů.

a) Předpokládejme, že všichni prvočíselní dělitelé jsou stejní, tedy $b = c = 2$. V takovém případě by úžasné číslo bylo 8 a všichni jeho dělitelé by byli 1, 2, 4, 8. Součet všech dělitelů by byl 15, což není dvojnásobek čísla 8. Případ $b = c = 2$ tedy není možný.

b) Předpokládejme, že dva prvočíselní dělitelé jsou rovni 2, tedy $b = 2$. V takovém případě by úžasné číslo bylo $4c$ a všichni jeho dělitelé by byli 1, 2, c, 4, $2c$, $4c$. Součet všech dělitelů by byl $7 + 7c$ a podle zadání má platit

$$7 + 7c = 8c.$$

To platí právě tehdy, když $c = 7$; odpovídající úžasné číslo je $4c = 28$.

c) Předpokládejme, že dva prvočíselní dělitelé jsou stejní, ovšem oba různí od 2, tedy $b = c \neq 2$. V takovém případě by úžasné číslo bylo $2b^2$ a všichni jeho dělitelé by byli 1, 2, b, $2b$, b^2, $2b^2$. Součet všech dělitelů by byl $3 + 3b + 3b^2$ a podle zadání má platit

$$\begin{aligned} 3 + 3b + 3b^2 &= 4b^2, \\ 3(1 + b) &= b^2. \end{aligned}$$

Číslo nalevo je násobkem čísla 3, tedy číslo napravo má také být násobkem 3. Vzhledem k tomu, že b je prvočíslo, muselo by být $b = 3$. V takovém případě by však nalevo bylo $3 \cdot 4 = 12$, zatímco napravo $3^2 = 9$. Případ $b = c \neq 2$ tedy není možný.

d) Předpokládejme, že prvočíselní dělitelé jsou navzájem různí, tedy $2 \neq b \neq c \neq 2$. V takovém případě by úžasné číslo bylo $2bc$ a všichni jeho dělitelé by byli 1, 2, b, c, $2b$, $2c$, bc, $2bc$. Součet všech dělitelů by byl $3 + 3b + 3c + 3bc$ a podle zadání má platit

$$\begin{aligned} 3 + 3b + 3c + 3bc &= 4bc, \\ 3(1 + b + c) &= bc. \end{aligned}$$

Číslo nalevo je násobkem čísla 3, tedy číslo napravo má také být násobkem 3. Vzhledem k tomu, že b a c jsou prvočísla, muselo by být buď $b = 3$, nebo $c = 3$. Pro $b = 3$ by předchozí rovnost vypadala takto $3 \cdot (4 + c) = 3c$, což ovšem neplatí pro žádné c. Diskuse pro $c = 3$ je obdobná. Případ $b \neq c \neq 2$ tedy není možný.

Jediné úžasné číslo je 28.

Poznámka. Nemožnost případu c) může být zdůvodněna také takto: Každé prvočíslo $b \neq 2$ je liché, tedy číslo b^2 je také liché, zatímco číslo $1 + b$ (stejně jako jakýkoli jeho násobek) je sudé. V uvedené rovnosti na pravé straně by tedy mělo být liché číslo, zatímco na levé straně sudé. Podobný argument nám však nic neodhalí v případě d).

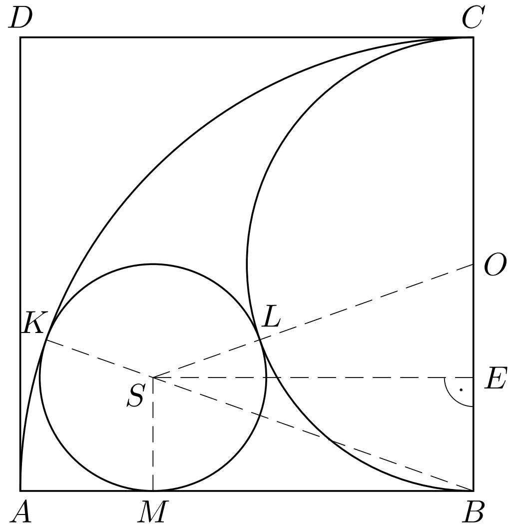
Z9–I–3

Jirka sestrojil čtverec $ABCD$ o straně 12 cm. Do tohoto čtverce narýsoval čtvrtkružnici k, která měla střed v bodě B a procházela bodem A, a půlkružnici l, která měla střed v polovině strany BC a procházela bodem B.

Rád by ještě sestrojil kružnici, která by ležela uvnitř čtverce a dotýkala se čtvrtkružnice k, půlkružnice l i strany AB. Určete poloměr takové kružnice. (*M. Volfová*)

Nápověda. Přemýšlejte, jak byste pomocí poloměru hledané kružnice vyjádřili vzdálenost jejího středu od úsečky AB, příp. BC.

Možné řešení. Během řešení se odkazujeme na následující obrázek, v němž O značí střed strany BC, S značí střed Jirkovy vytoužené kružnice h, K značí dotykový bod kružnic h a k, L značí dotykový bod kružnic h a l a M značí dotykový bod kružnice h a úsečky AB. Dále budeme odkazovat na pomocný bod E, který je patou kolmice z bodu S na stranu BC. Hledaný poloměr kružnice h v cm označíme r.



Vzdálenost bodu S od úsečky AB je rovna $r = |SM| = |EB|$. Vzdálenost bodu S od úsečky BC je rovna velikosti úsečky SE, která je odvěsnou jak v pravoúhlém trojúhelníku SEO, tak v trojúhelníku SEB. Všechny zbylé strany v obou trojúhelnících snadno vyjádříme pomocí r; odtud pomocí Pythagorovy věty budeme umět určit neznámou r.

Body S a O jsou středy kružnic h a l, které se dotýkají v bodě L. Tyto tři body leží na jedné přímce, vzdálenost SO je proto rovna

$$|SO| = |SL| + |LO| = r + 6.$$

Obdobně, vzdálenost SB je rovna

$$|SB| = |BK| - |KS| = 12 - r,$$

neboť S a O jsou středy kružnic h a k a K je jejich dotykovým bodem. Vzdálenost OE je rovna

$$|OE| = |OB| - |BE| = 6 - r.$$

Odtud a z Pythagorovy věty v trojúhelnících SEO a SEB dostáváme:

$$\begin{aligned} |SE|^2 = |SO|^2 - |OE|^2 &= |SB|^2 - |BE|^2, \\ (6+r)^2 - (6-r)^2 &= (12-r)^2 - r^2, \\ 12r + 12r &= 144 - 24r, \\ 48r &= 144, \\ r &= 3. \end{aligned}$$

Poloměr hledané kružnice je 3 cm.

Z9–I–4

V tabulce je kurzovní lístek směnárny, avšak některé hodnoty jsou v něm nahrazeny otazníky. Směnárna vyměňuje peníze v uvedených kurzech a neúčtuje si jiné poplatky.

	nákup	prodej
1 EUR	26,20 CZK	28,00 CZK
1 GBP	? CZK	? CZK

1. Kolik eur dostane zákazník, pokud zde smění 4 200 Kč?

Když směnárník vykoupí od zákazníka 1 000 liber a poté je všechny prodá, jeho celkový zisk je 2 200 Kč. Kdyby místo toho směnárník prodal 1 000 liber a poté by všechny utržené koruny směnil s jiným zákazníkem za libry, vydělal by na tom 68,75 liber.

2. Za kolik korun směnárník nakupuje a za kolik prodává 1 libru? (*L. Šimůnek*)

Nápověda. U 2. úkolu si po každé transakci pomocí neznámých zapište, kolik směnárníkovi přibylo či ubylo korun a kolik mu přibylo či ubylo liber.

Možné řešení. 1. Pokud má směnárna vydat eura zákazníkovi, znamená to, že směnárna eura prodává. Pracujeme proto s hodnotou ve sloupci „prodej“, tj. 28 Kč. Zákazník dostane $4\,200 : 28 = 150$ eur.

2. Neznámou ve sloupci „nákup“ označíme n, ve sloupci „prodej“ použijeme p. Když směnárna vykoupí 1 000 liber a poté je všechny prodá, množství liber ve směnárně se nezmění; počet korun se nejprve zmenší o $1\,000n$ a poté se zvětší o $1\,000p$. Zisk 2 200 Kč můžeme vyjádřit následující rovnicí, kterou ihned upravíme:

$$\begin{aligned} -1\,000n + 1\,000p &= 2\,200, \\ 1\,000p &= 2\,200 + 1\,000n, \qquad (1) \\ p &= 2{,}2 + n. \end{aligned}$$

Když směnárník prodá 1 000 liber a poté všechny utržené koruny smění s jiným zákazníkem za libry, počet korun ve směnárně se sice přechodně zvětší o $1\,000p$, ale nakonec zůstane roven výchozí hodnotě. Suma liber se nejprve zmenší o 1 000 a poté se zvětší o počet liber, které směnárník nakoupí za $1\,000p$ korun, tzn. o $1\,000\frac{p}{n}$ liber. Zisk 68,75 liber můžeme vyjádřit následující rovnicí, kterou ihned upravíme:

$$\begin{aligned} -1000 + 1\,000\frac{p}{n} &= 68{,}75, \\ 1\,000p &= 1\,068{,}75n, \\ p &= 1{,}06875n. \end{aligned} \tag{2}$$

Porovnáním (1) a (2) dostáváme:

$$\begin{aligned} 2\,200 + 1\,000n &= 1\,068{,}75n, \\ 68{,}75n &= 2\,200, \\ n &= 32. \end{aligned}$$

Odtud dosazením do (1), resp. (2) získáme $p = 34{,}2$. Směnárna tedy nakupuje jednu libru za 32 Kč a prodává ji za 34,20 Kč.

Z9–I–5

Bětka napsala přirozené číslo s navzájem různými číslicemi. Pod něj zapsala číslice původního čísla odzadu a tak získala nové číslo se stejným počtem číslic. Sečtením těchto dvou čísel dostala číslo, které opět mělo stejný počet číslic jako myšlené číslo a skládalo se pouze z číslic myšleného čísla (avšak nemuselo obsahovat všechny jeho číslice).

Erice se Bětčino číslo zalíbilo a chtěla si najít jiné číslo se stejnými vlastnostmi. Zjistila, že neexistuje menší takové číslo než Bětčino a větší se jí hledat nechce. Určete, jaké číslo si myslí Bětka a jaké číslo by mohla najít Erika, kdyby měla víc trpělivosti.

(*K. Jasenčáková*)

Nápověda. Zvažujte postupně možnosti, kdy je myšlené číslo jednomístné, dvojmístné atd. V jednotlivých případech přemýšlejte postupně nad možnými součty na místě jednotek, desítek atd.

Možné řešení. Nejprve najdeme Bětčino číslo, tj. nejmenší číslo s uvedenými vlastnostmi.

1) Předpokládejme, že Bětčino číslo je jednomístné, a označíme si je a. Potom by podle zadání muselo platit $a + a = a$, což platí pouze když $a = 0$. Nula však není přirozené číslo, takže Bětčino myšlené číslo nemůže být jednomístné.

2) Předpokládejme, že Bětčino číslo je dvojmístné, a označíme si je $\overline{ab}$. Ať už součet $\overline{ab} + \overline{ba}$ dopadne jakkoli, na místě jednotek čteme buď $b + a = a$, nebo $b + a = b$. Odtud dostáváme buď $b = 0$, nebo $a = 0$. V takovém případě by však buď číslo $\overline{ba}$, nebo číslo $\overline{ab}$ nebylo dvojmístné. Bětčino myšlené číslo tedy nemůže být dvojmístné.

3) Předpokládejme, že Bětčino číslo je trojmístné, a označíme si je $\overline{abc}$. Ze stejného důvodu jako výše nemohou být čísla a a c nuly, tedy v součtu $\overline{abc}+\overline{cba}$ se na místě jednotek může objevit jedině b:

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ c & b & a \\ \hline * & * & b \end{array}$$

Současně $c + a$ nemůže být větší než 9, protože potom by celkový součet $\overline{abc} + \overline{cba}$ nebyl trojmístný. Odtud se dozvídáme, že

$$a + c = b, \tag{1}$$

což mimo jiné znamená, že ani číslice b nemůže být 0.

Odtud plyne, že součet $b + b$ na místě desítek nemůže být menší než 10; v takovém případě by tento součet byl roven jednomu z čísel a, b, c, což vždy vede k nějakému sporu s předchozími poznatky:

- Pokud $b + b = a$ nebo $b + b = c$, potom podle (1) dostáváme $2a + 2c = a$ nebo $2a + 2c = c$, tedy $a = -2c$ nebo $c = -2a$, což není možné.
- Pokud $b + b = b$, potom $b = 0$, což není možné.

Součet $b + b$ na místě desítek však nemůže být ani větší než 9. V takovém případě by součet na místě stovek byl $a + c + 1$ a toto číslo má být rovno jednomu z čísel a, b, c; to vždy vede k nějakému sporu:

- Pokud $a + c + 1 = a$ nebo $a + c + 1 = c$, potom $c = -1$ nebo $a = -1$, což není možné.
- Pokud $a + c + 1 = b$, potom podle (1) dostáváme $b + 1 = b$, tedy $1 = 0$, což není možné.

Bětčino myšlené číslo tedy nemůže být ani trojmístné.

4) Předpokládejme, že Bětčino číslo je čtyřmístné, a označíme si je $\overline{abcd}$. Ze stejného důvodu jako výše nemohou být čísla a a d nuly, tedy v součtu $\overline{abcd} + \overline{dcba}$ se na místě jednotek může objevit buď b, nebo c:

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ d & c & b & a \\ \hline * & * & * & b \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ d & c & b & a \\ \hline * & * & * & c \end{array}$$

Současně $d + a$ nemůže být větší než 9, protože potom by celkový součet $\overline{abcd} + \overline{dcba}$ nebyl čtyřmístný. Odtud se dozvídáme, že

$$\text{buď} \quad a + d = b, \tag{2}$$

$$\text{nebo} \quad a + d = c. \tag{3}$$

To mimo jiné znamená, že buď $b \neq 0$, nebo $c \neq 0$.

Nyní předpokládáme, že součet $c + b$ na místě desítek je menší než 10, tzn. tento součet je roven jednomu z čísel a, b, c, d, a prozkoumáme jednotlivé případy. Nejprve uvažujme platnost (2), a tedy $b \neq 0$:

- Pokud $b + c = a$ nebo $b + c = d$, potom podle (2) dostáváme $a + d + c = a$ nebo $a + d + c = d$, tedy $c = -d$ nebo $c = -a$, což není možné.
- Pokud $b + c = b$, potom $c = 0$ (což ničemu nevadí).
- Pokud $b + c = c$, potom $b = 0$, což není možné.

Podobně, za předpokladu (3) zjistíme, že jediná přípustná možnost je

- $b + c = c$, tedy $b = 0$.

Celkem tak objevujeme dva možné případy:

$$\begin{array}{cccc} a & b & 0 & d \\ d & 0 & b & a \\ \hline b & b & b & b \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} a & 0 & c & d \\ d & c & 0 & a \\ \hline c & c & c & c \end{array} \tag{4}$$

Protože Bětčino číslo je nejmenší číslo vyhovující všem uvedeným podmínkám, vůbec se nemusíme zabývat případem, kdy součet $c+b$ je větší než 9, a soustředíme se výhradně na druhou z výše jmenovaných možností, tj. $b = 0$. Dosadíme nejmenší možné číslo na místo tisícovek $a = 1$ a zjišťujeme, že $c = d + 1$. Nejmenší vyhovující možnost je $d = 2$ a $c = 3$. Bětka si tedy hrála s číslem 1032 a její výpočet vypadal takto:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ \hline 3 & 3 & 3 & 3 \end{array}$$

Z výše uvedeného je nyní snadné doplnit nějaké jiné číslo s uvedenými vlastnostmi, tedy nějaké Eričino číslo. Např. stačí v Bětčině čísle zaměnit číslice na místě jednotek a tisícovek nebo číslice na místě desítek a stovek, příp. uvažovat jakákoli čísla tvaru (4). Mezi možnými řešeními jsou také čísla, kdy součet $c+b$ je větší než 9. Zde je několik řešení, na která mohla Erika přijít, kdyby ovšem nebyla tak netrpělivá:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ \hline 4 & 4 & 4 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ \hline 3 & 3 & 3 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1 & 8 & 9 & 7 \\ 7 & 9 & 8 & 1 \\ \hline 9 & 8 & 7 & 8 \end{array}$$

Poznámky. a) Pokud umíme zdůvodnit, že hledané Bětčino číslo musí být aspoň čtyřmístné, potom je lze snadno najít zkoušením:

Nejmenší čtyřmístné číslo s navzájem různými číslicemi je 1023. Toto číslo však není řešením, neboť $1023 + 3201 = 4224$. Pokud nás napadne prohodit číslice 2 a 3, dostaneme vyhovující řešení: $1032 + 2301 = 3333$. Abychom se přesvědčili, že toto řešení je nejmenší možné, stačí ověřit, že žádné číslo mezi 1023 a 1032 nevyhovuje některé z uvedených podmínek.

b) Nahrazení ostatních úvah zkoušením je také možné, avšak často velmi pracné. Nicméně pokud je řešení založené na zkoušení úplné, nechť je považováno za správné. Jakékoli dílčí obecné postřehy mohou počet možností k prozkoušení zajímavě snižovat (např. počet trojic různých čísel od 1 do 9 vyhovujících rovnosti (1) jistě není větší než 32).

Z9–I–6

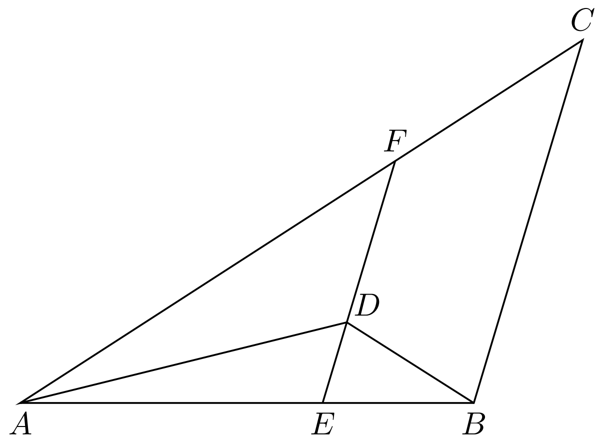
Na stranách AB a AC trojúhelníku ABC leží po řadě body E a F, na úsečce EF leží bod D. Přímky EF a BC jsou rovnoběžné a současně platí

$$|FD| : |DE| = |AE| : |EB| = 2 : 1.$$

Trojúhelník ABC má obsah 27 hektarů a úsečkami EF, AD a DB je rozdělen na čtyři části. Určete obsahy těchto čtyř částí. (*V. Žádník*)

Nápověda. Začněte s obsahem trojúhelníku AEF.

Možné řešení. Nejprve si zadání věrně znázorníme:



Přímky EF a BC jsou rovnoběžné, souhlasné úhly u vrcholů E a B, resp. u vrcholů F a C jsou shodné, trojúhelníky AEF a ABC jsou tudíž podobné. Odpovídající koeficient podobnosti je roven

$$|AE| : |AB| = |AE| : (|AE| + |EB|) = 2 : 3.$$

Obsahy těchto trojúhelníků jsou proto v poměru

$$S_{AEF} : S_{ABC} = 4 : 9,$$

takže $S_{AEF} = S_{ABC} \cdot 4 : 9 = 12$ hektarů.

Úsečka AD dělí trojúhelník AEF na dva trojúhelníky, jejichž obsahy jsou ve stejném poměru jako délky úseček FD a DE, tedy

$$S_{ADF} : S_{ADE} = |FD| : |DE| = 2 : 1.$$

Odtud plyne, že $S_{ADE} = S_{AEF} : 3 = 4$ hektary a $S_{ADF} = 2 \cdot S_{ADE} = 8$ hektarů.

Úsečka DE dělí trojúhelník ABD na dva trojúhelníky, jejichž obsahy jsou ve stejném poměru jako délky úseček AE a EB, tedy

$$S_{ADE} : S_{BDE} = |AE| : |EB| = 2 : 1.$$

Odtud plyne, že $S_{BDE} = S_{ADE} : 2 = 2$ hektary.

Nyní známe obsahy tří ze čtyř částí trojúhelníku ABC, obsah té poslední je roven rozdílu $S_{BCFD} = S_{ABC} - S_{AEF} - S_{BDE} = 13$ hektarů. Obsahy částí trojúhelníku ABC v hektarech jsou:

$$S_{BED} = 2, \quad S_{AED} = 4, \quad S_{ADF} = 8, \quad S_{BCFD} = 13.$$