65. ročník matematické olympiády

Úlohy krajského kola kategorie C

1. Najděte nejmenší možnou hodnotu výrazu

$$3x^2 - 12xy + y^4,$$

ve kterém x a y jsou libovolná celá nezáporná čísla.

2. Určete, kolika způsoby lze všechny hrany krychle $ABCDEFGH$ obarvit čtyřmi danými barvami (celou hranu bez krajních bodů vždy jednou barvou), aby přitom každá stěna krychle měla hrany všech čtyř barev.

3. V pravoúhlém lichoběžníku $ABCD$ s pravým úhlem u vrcholu A základny AB je bod K průsečíkem výšky CP lichoběžníku s jeho úhlopříčkou BD. Obsah čtyřúhelníku $APCD$ je polovinou obsahu lichoběžníku $ABCD$. Určete, jakou část obsahu trojúhelníku ABC zaujímá trojúhelník BCK.

4. Adam s Bárou hrají se zlomkem

$$\frac{10a + b}{10c + d}$$

takovou hru na čtyři tahy: Hráči střídavě nahrazují libovolné z dosud neurčených písmen a, b, c, d nějakou číslicí od 1 do 9. Bára vyhraje, když výsledný zlomek bude roven buď celému číslu, nebo číslu s konečným počtem desetinných míst; jinak vyhraje Adam (například když vznikne zlomek $\frac{11}{29}$). Začíná-li Adam, jak má hrát Bára, aby zaručeně vyhrála? Začíná-li Bára, je možné poradit Adamovi tak, aby vždy vyhrál?

Krajské kolo kategorie C se koná

v úterý 12. dubna 2016

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu. Bodová hranice k určení úspěšných řešitelů bude stanovena centrálně po vyhodnocení statistik bodových výsledků ze všech krajů. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

Řešení úloh krajského kola kategorie C

1. Označme daný výraz V a upravme ho dvojím užitím obratu zvaného *doplnění na čtverec*:

$$V = 3x^2 - 12xy + y^4 = 3(x-2y)^2 - 12y^2 + y^4 = 3(x-2y)^2 + (y^2-6)^2 - 36.$$

Zřejmě platí $(x-2y)^2 \geqq 0$, takže nejmenší hodnotu výrazu V *při pevném* y dostaneme, když položíme $x = 2y$. Zbývá proto najít nejmenší možnou hodnotu mocniny $(y^2-6)^2$ s nezápornou celočíselnou proměnnou y. Protože $y^2 \in \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$ a číslo 6 padne mezi čísla 4 a 9 této množiny, platí pro každé celé číslo y nerovnost

$$(y^2-6)^2 \geqq \min\bigl((4-6)^2, (9-6)^2\bigr) = \min\{4, 9\} = 4.$$

Pro libovolná celá čísla x a y tak dostáváme odhad

$$V \geqq 3 \cdot 0 + 4 - 36 = -32,$$

přitom rovnost $V = -32$ nastane pro $y = 2$ a $x = 2y = 4$.

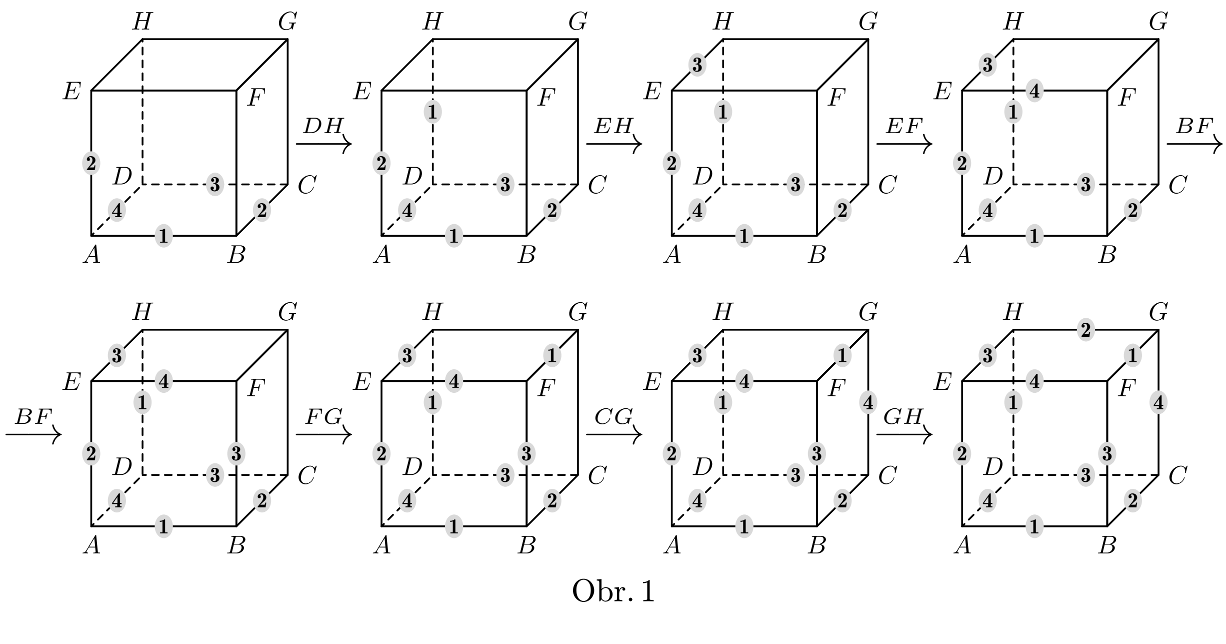
Odpověď. Hledaná nejmenší možná hodnota daného výrazu je -32.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 3 body za potřebnou úpravu výrazu, 1 bod za určení minima mocniny $(y^2-6)^2$ (stačí konstatovat, že 2^2 je druhá mocnina nejbližší k číslu 6), 1 bod za určení hledané hodnoty -32 a 1 bod za uvedení dvojice (x, y), pro niž se tato hodnota dosahuje.

2. Různé barvy musí mít nejen čtyři hrany každé stěny krychle, ale také každé tři hrany, které vycházejí ze stejného vrcholu krychle (protože každé dvě z nich patří jedné stěně). Tento úvodní postřeh budeme v celém řešení mlčky opakovaně využívat.

Začneme obarvením hran stěny $ABCD$, barvy jejích hran AB, BC, CD, DA označíme po řadě čísly 1, 2, 3, 4. Pro výběr barvy 1 máme 4 možnosti, pro výběr barvy 2 už jen 3 možnosti atd., takže počet všech obarvení hran stěny $ABCD$ je roven $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Vybereme jedno z nich a dále budeme uvažovat o možnostech obarvení zbylých osmi hran krychle.

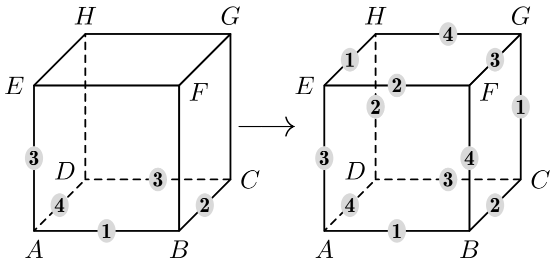
Podle barvy 1 hrany AB a barvy 4 hrany AD vidíme, že hrana AE může mít barvu 2 nebo 3. Rozeberme podrobně první případ, kdy AE má barvu 2. Známe tedy obarvení pěti hran, jak je vyznačeno na první krychli ze seriálu na obr. 1, který ukazu-



Obr. 1

je, jak postupně určit (už jednoznačně daná) obarvení zbylých sedmi hran. V každém kroku nad šipkou uvádíme hranu, jejíž barvu právě určujeme. Popíšeme první krok: hrana DH nemůže mít ani barvy 3 a 4 (kvůli hranám DC a DA), ani barvu 2 (kvůli stěně $ADHE$), má tedy barvu 1. Takto argumentujeme i v dalších krocích; na poslední krychli dostáváme obarvení všech jejích hran, které skutečně vyhovuje podmínce úlohy.

Obdobným postupem lze získat (jediné) vyhovující obarvení všech hran krychle i ve druhém případě, kdy hrana AE má barvu 3 (obr. 2). Podrobný seriál jsme vynechali, zejména proto, že počáteční krychli z obr. 2 (včetně určených barev) lze převést na počáteční krychli z obrázku 1, když ji nejprve zobrazíme v souměrnosti podle roviny $ACGE$ a poté navzájem vyměníme barvy $1 \leftrightarrow 4$, $2 \leftrightarrow 3$ (a značení vrcholů $B \leftrightarrow D$, $F \leftrightarrow H$).

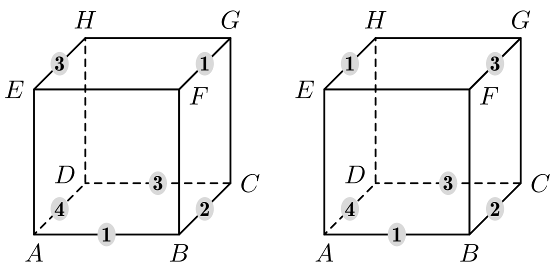


Obr. 2

Ověřili jsme, že každé z 24 možných obarvení hran stěny $ABCD$ lze rozšířit právě dvěma způsoby na vyhovující obarvení všech 12 hran krychle. Proto je jejich celkový počet roven $2 \cdot 24 = 48$.

Jiné řešení. Opět budeme opakovaně využívat postřeh z úvodu prvního řešení, tentokrát však v odlišném postupu založeném na poznatku, že *žádné dvě rovnoběžné hrany krychle nemohou mít stejnou barvu.* Stačí to dokázat jen pro dvě rovnoběžné hrany, které neleží v téže stěně krychle, bez újmy na obecnosti například pro hrany AB a GH. Kdyby naopak měly stejnou barvu, nemohla by ji mít už žádná z hran BC, BF, GC, GF, neboli by ji neměla žádná z hran stěny $BCGF$, a to je spor.

Označíme-li barvy hran AB, BC, CD, DA opět po řadě čísly 1, 2, 3, 4, pak podle dokázaného poznatku mají v horní stěně $EFGH$ barvu 1 a 3 hrany FG a EH — nevíme ovšem v jakém pořadí; obě možnosti jsou vykresleny na obr. 3. V jakém pořadí



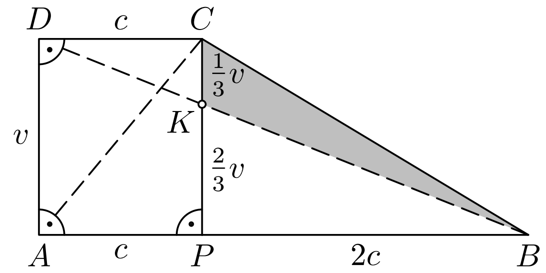
Obr. 3

jsou barvy 2 a 4 zbylých hran EF a GH horní stěny? Na levé krychli podle barev AB, AD a EH vidíme, že AE má barvu 2, takže v horní podstavě má EF barvu 4 a GH barvu 2. Podobně na pravé krychli má BF barvu 4, takže EF má barvu 2 a GH barvu 4. Jednoznačné obarvení zbylých „svislých“ hran obou krychlí je už nasnadě; pro levou krychli obdržíme výsledné obarvení z obr. 1, pro pravou krychli obarvení z obr. 2.

Tímto postupem znovu docházíme k závěru, že hledaný počet vyhovujících obarvení dané krychle $ABCDEFGH$ je roven dvojnásobku počtu výběrů barev pro hrany stěny $ABCD$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za určení počtu 24 všech obarvení jedné stěny udělte 1 bod, stejně tak ohodnoťte postřeh o různých barvách libovolných tří hran se společným krajním bodem. Při neúplném postupu z prvního řešení udělte 1 bod za rozlišení dvou možností pro barvu (páté) hrany AE, určování barev zbylých sedmi hran může být v úplném řešení popsáno pouze pro první z těchto hran a pro další bez postupných obrázků. Při neúplném postupu z druhého řešení udělte 2 body za zdůvodnění poznatku o barvách libovolných dvou rovnoběžných hran.

3. V pravoúhelníku $APCD$ označme $c = |CD| = |AP|$ a $v = |AD| = |CP|$ (obr. 4, kde jsme již také vyznačili další délky, které odvodíme v průběhu řešení).[1]



Obr. 4

Z předpokladu $S(APCD) = \frac{1}{2}S(ABCD)$ plyne pro druhou polovinu obsahu $ABCD$ vyjádření $\frac{1}{2}S(ABCD) = S(PBC)$, tudíž $S(APCD) = S(PBC)$ neboli $cv = \frac{1}{2}|PB|v$, odkud vzhledem k tomu, že $v \neq 0$, vychází $|PB| = 2c$, v důsledku čehož $|AB| = 3c$.

Trojúhelníky CDK a PBK mají pravé úhly u vrcholů C, P a shodné (vrcholové) úhly u společného vrcholu K, takže jsou podle věty *uu* podobné, a to s koeficientem $|PB| : |CD| = 2c : c = 2$. Proto také platí $|PK| : |CK| = 2 : 1$, odkud $|KP| = \frac{2}{3}v$ a $|CK| = \frac{1}{3}v$.

Posuzované obsahy trojúhelníků ABC a BCK tak mají vyjádření

$$S(ABC) = \frac{|AB| \cdot |CP|}{2} = \frac{3cv}{2} \quad \text{a} \quad S(BCK) = \frac{|CK| \cdot |BP|}{2} = \frac{\frac{1}{3}v \cdot 2c}{2} = \frac{cv}{3},$$

proto jejich poměr má hodnotu

$$\frac{S(BCK)}{S(ABC)} = \frac{\frac{1}{3}cv}{\frac{3}{2}cv} = \frac{2}{9}.$$

Odpověď. Trojúhelník BCK zaujímá 2/9 obsahu trojúhelníku ABC.

Za úplné řešení úlohy udělte 6 bodů, z toho 1 bod za odvození $|BP| = 2|CD|$, 2 body za objev podobnosti trojúhelníků CDK a PBK s koeficientem 2, 1 bod za určení $|CK| = \frac{1}{3}|AD|$ a zbylé 2 body za sestavení a výpočet hledaného poměru. Absenci argumentu z poznámky pod čarou v žákovských protokolech tolerujte.

[1] Protože podle zadání úhlopříčka BD protíná výšku CP, musí její pata P ležet mezi body A a B, takže se jedná o „obvyklý“ lichoběžník $ABCD$ s delší základnou AB a kratší základnou CD.

4. Má-li první tah Adam, může Bára hrát tak, aby byl výsledný zlomek roven jedné, což podle zadání přinese Báře vítězství. Takový zlomek vyjde, budou-li současně platit obě rovnosti $a = c$ a $b = d$, kterých Bára dosáhne tahy „souměrně sdruženými“ podle zlomkové čáry s Adamovými tahy.

Začíná-li Bára, může Adam hrát tak, aby vyšel zlomek se jmenovatelem $10c + d$ dělitelným třemi, jehož čitatel $10a+b$ však dělitelný třemi nebude. K tomu Adamovi stačí po každém z obou Bářiných tahů vhodně „dourčit“ čitatel či jmenovatel, kupříkladu podle kritéria dělitelnosti třemi mu stačí zajistit, aby se ciferný součet $a + b$ čitatele rovnal 10 a aby se ciferný součet $c+d$ jmenovatele rovnal 9 nebo 12. Adam tak vyhraje, protože výsledný zlomek nebude možné krátit třemi, takže se nebude rovnat žádnému zlomku s mocninou čísla 10 ve jmenovateli, jakým lze zapsat každé číslo s konečným počtem desetinných míst.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 3 body za popis vítězné Bářiny strategie v případě, kdy začíná Adam, a 3 body za popis vítězné Adamovy strategie v případě, kdy začíná Bára. Obě popsané vítězné strategie nejsou samozřejmě jediné možné, například Adam může založit svou strategii na dělitelnosti jedenácti namísto třemi, když svými tahy dosáhne rovnosti $c = d$ a nerovnosti $a \neq b$.