I. kolo kategorie Z6

Z6–I–1

Ivan a Mirka se dělili o hrušky na míse. Ivan si vždy bere dvě hrušky a Mirka polovinu toho, co na míse zbývá. Takto postupně odebírali Ivan, Mirka, Ivan, Mirka a nakonec Ivan, který vzal poslední dvě hrušky.

Určete, kdo měl nakonec víc hrušek a o kolik. (*M. Dillingerová*)

Nápověda. Kolik hrušek si vzala Mirka podruhé?

Možné řešení. Ivan si bral třikrát po dvou hruškách, nakonec tak měl 6 hrušek. Abychom určili, kolik nakonec měla Mirka, postupně odzadu zjistíme, jak se počty hrušek vyvíjely. K tomu si stačí uvědomit, že před každým Ivanovým odebíráním bylo na míse o dvě hrušky víc a před každým Mirčiným odebíráním byl na míse dvojnásobný počet hrušek.

Ivan si při svém třetím odebírání vzal poslední 2 hrušky.

Mirka si při svém druhém odebírání vzala 2 hrušky, před tím na míse byly 4 hrušky.

Ivan si při svém druhém odebírání vzal 2 hrušky, před tím na míse bylo 6 hrušek.

Mirka si při svém prvním odebírání vzala 6 hrušek, před tím na míse bylo 12 hrušek.

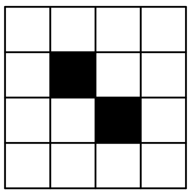
Ivan si při svém prvním odebírání vzal 2 hrušky, původně na míse bylo 14 hrušek.

Mirka si celkem vzala 8 hrušek, nakonec tedy měla o dvě hrušky víc než Ivan.

Z6–I–2

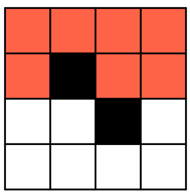
Arnošt si ze čtverečkového papíru vystřihl čtverec 4×4. Kristián v něm vystřihl dvě díry, viz dva černé čtverečky na obrázku. Tento útvar zkoušel Arnošt rozstřihnout podle vyznačených čar na dvě shodné části.

Najděte alespoň čtyři různé způsoby, jak to mohl Arnošt udělat. (Přitom dvě stříhání považujte za různá, pokud části vzniklé jedním stříháním nejsou shodné s částmi vzniklými druhým stříháním.) (*A. Bohiniková*)

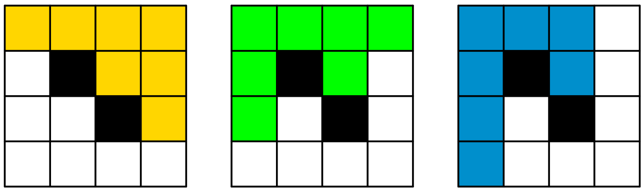


Nápověda. Všimněte si jisté souměrnosti.

Možné řešení. Jedno z nejjednodušších možných rozdělení je naznačeno na následujícím obrázku:



Nově vzniklé části jsou — stejně jako původní útvar — souměrné podle středu ohraničujícího čtverce. Předchozí rozdělení je možné postupně modifikovat tak, aby středově souměrné čtverečky patřily do různých částí. Přidáváním, resp. odebíráním čtverečků v prvním sloupci dostáváme následující možná rozdělení:

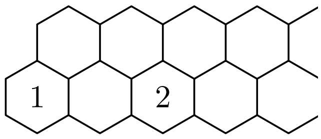


Poznámka. Jakákoli další modifikace vede buď k rozdělení shodnému s některým z předchozích, nebo k rozdělení, které sestává z více nesouvislých částí. Uvedená čtyři řešení tedy představují všechny různé způsoby rozdělení.

Z6–I–3

Na obrázku jsou naznačeny dvě řady šestiúhelníkových polí, které doprava pokračují bez omezení. Do každého pole doplňte jedno kladné celé číslo tak, aby součin čísel v libovolných třech navzájem sousedících polích byl 2018.

Určete číslo, které bude v 2019. políčku v horní řadě. (*L. Růžičková*)

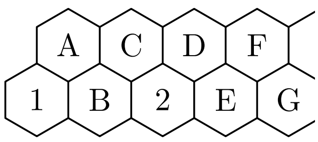


Nápověda. Která čísla můžete doplňovat?

Možné řešení. Prvočíselný rozklad čísla 2018 je $2 \cdot 1009$. Číslo 2018 je tedy možné zapsat jako součin tří kladných čísel pouze dvěma způsoby (až na záměnu pořadí činitelů):

$$1 \cdot 1 \cdot 2018, \quad 1 \cdot 2 \cdot 1009.$$

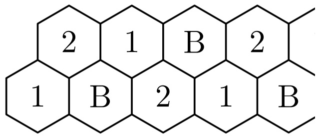
Do prázdných polí je tedy možno doplnit pouze některá z čísel 1, 2, 1009 a 2018. Kvůli snadnějšímu vyjadřování si neznámá čísla v prázdných polích označíme:



Aby platilo $1 \cdot A \cdot B = A \cdot B \cdot C$, musí být $C = 1$. Aby platilo $A \cdot B \cdot C = B \cdot C \cdot 2$, musí být $A = 2$. Aby platilo $B \cdot C \cdot 2 = C \cdot 2 \cdot D$, musí být $D = B$. Takto postupně zjišťujeme

$$1 = C = E, \quad A = 2 = F, \quad B = D = G \quad \text{atd.}$$

Čísla v polích se tedy pravidelně opakují podle následujícího vzoru:



Aby nyní součin libovolných tří navzájem sousedících polí byl 2018, musí být $B = 1009$. V horním řádku se tedy pravidelně střídá trojice čísel 2, 1, 1009. Jelikož $2019 = 3 \cdot 673$, je 2019. políčko třetím políčkem v 673. trojici v horním řádku. Proto je v tomto políčku číslo 1009.

Poznámka. Jakmile víme, která čísla se mohou v polích vyskytovat, můžeme je začít postupně doplňovat do některého z prázdných polí a následně zkoumat, zda a případně jak pokračovat dále. Tak lze vyloučit všechny možnosti až na tu uvedenou výše. (Kdybychom např. doplnili $A = 1$, potom z požadavku $1 \cdot A \cdot B = 2018$ plyne, že $B = 2018$. Aby dále platilo $A \cdot B \cdot C = 2018$, muselo by být $C = 1$, a tedy $B \cdot C \cdot 2 = 2018 \cdot 1 \cdot 2$. Tento součin však není 2018, proto A nemůže být 1.)

Řešení, ze kterého není patrné, proč výše uvedené doplnění je jediné možné, nemůže být hodnoceno nejlepším stupněm.

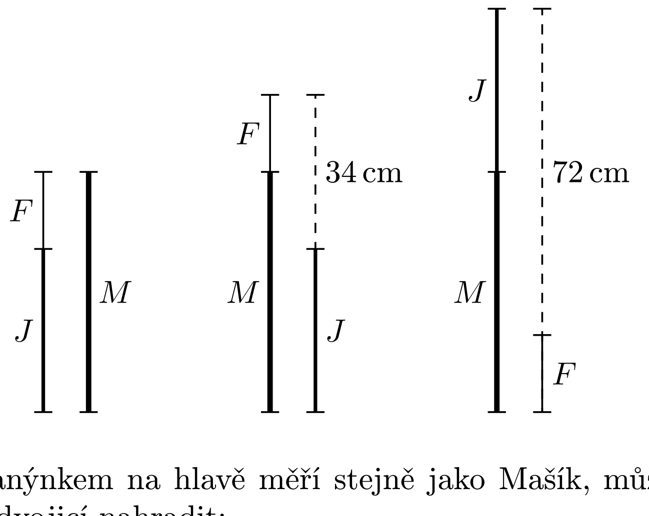
Z6–I–4

Pan Ticháček měl na zahradě tři sádrové trpaslíky: největšímu říkal Mašík, prostřednímu Jíři a nejmenšímu Fanýnek. Protože si s nimi rád hrával, časem zjistil, že když postaví Fanýnka na Jířu, jsou stejně vysocí jako Mašík. Když naopak postaví Fanýnka na Mašíka, měří dohromady o 34 cm víc než Jířa. A když postaví na Mašíka Jířu, jsou o 72 cm vyšší než Fanýnek.

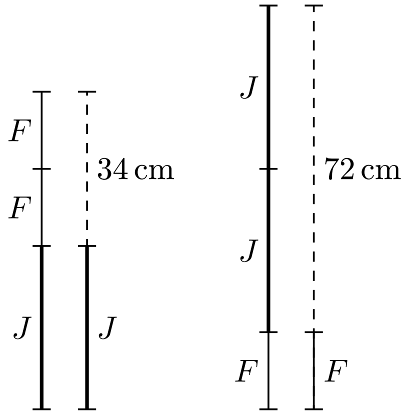
Jak vysocí jsou trpaslíci pana Ticháčka? (*M. Petrová*)

Nápověda. Znázorněte si všechny tři situace.

Možné řešení. Všechny tři situace si znázorníme takto:



Protože Jířa s Fanýnkem na hlavě měří stejně jako Mašík, můžeme u druhé a třetí situace Mašíka touto dvojicí nahradit:



Nyní je vše jasné: Dva Fanýnkové na sobě měří 34 cm, jeden Fanýnek tak měří 17 cm. Dva Jířové na sobě měří 72 cm, jeden Jíťa proto měří 36 cm. Mašík pak měří jako Fanýnek a Jíťa dohromady, tedy $17 + 36 = 53$ (cm).

Z6–I–5

V následujícím příkladě na sčítání představují stejná písmena stejné číslice, různá písmena různé číslice:

$$\begin{array}{r} R\,A\,T\,A\,M \\ R\,A\,D \\ \hline U\,L\,O\,H\,Y \end{array}$$

Nahraďte písmena číslicemi tak, aby byl příklad správně. Najděte dvě různá nahrazení.

(*E. Novotná*)

Nápověda. Začněte s číslicemi schovanými za písmeny A a L.

Možné řešení. Nejprve si všimněme, že v příkladě se vyskytuje deset různých písmen, tedy při nahrazování budou použity všechny číslice.

Dále vidíme, že sčítáme pětimístné číslo s trojmístným a že na místě tisícovek se mění číslice. To je možné jedině v případě, že dochází k přenosu ze sloupce stovek („přechod přes desítku"). Vzhledem k tomu, že příslušný součet je vždy menší než 20, musí být $A = 9$, $L = 0$ a $U = R + 1$.

Nyní oba sčítanci na místě desítek jsou 9, tedy by mohlo být $H = 8$, nebo $H = 9$ podle toho, zda dochází k přenosu z posledního sloupce. Vzhledem k tomu, že H a A mají být různé, musí být $H = 8$ a k přenosu z posledního sloupce nedochází. Pro číslice v tomto sloupci proto platí $Y = M + D$.

Ve sloupci na místě stovek přispívá přenos ze sloupce desítek a současně sám přispívá do sloupce tisícovek. Pro číslice v tomto sloupci proto platí $10 + O = T + R + 1$. Pro přehlednost stávající poznatky shrneme:

$$\begin{array}{r} R\;9\;T\;9\;M \\ R\;9\;D \\ \hline U\;0\;O\;8\;Y \end{array}, \quad \text{kde} \quad U = R + 1, \quad O = T + R - 9, \quad Y = M + D.$$

Neznámá písmena je třeba nahradit číslicemi od 1 do 7 tak, aby platily všechny uvedené vztahy. Nyní se nelze vyhnout zkoušení, které může být značně zdlouhavé. Vzhledem k tomu, že písmeno R se opakuje, je vhodné začít zkoušet odtud. Ukazuje se, že pro všechna vyhovující řešení je $R = 6$, a tedy $U = 7$. Zbylé číslice od 1 do 5 mohou být dosazeny následovně:

$$
\begin{array}{r}
6\,9\,5\,9\,1\\
6\,9\,3\\
\hline
7\,0\,2\,8\,4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
6\,9\,5\,9\,3\\
6\,9\,1\\
\hline
7\,0\,2\,8\,4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
6\,9\,4\,9\,2\\
6\,9\,3\\
\hline
7\,0\,1\,8\,5
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
6\,9\,4\,9\,3\\
6\,9\,2\\
\hline
7\,0\,1\,8\,5
\end{array}
$$

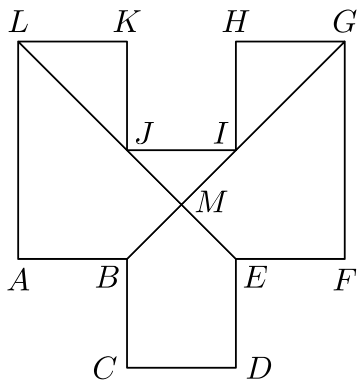
K uspokojivému vyřešení úlohy stačí najít dvě z uvedených nahrazení. Záměna M a D je zřejmou možností, jak z jednoho řešení odvodit druhé.

Poznámka. Před vlastním zkoušením si lze všimnout, že aby platilo $O \geqq 1$, musí být $T + R \geqq 10$. Vzhledem k tomu, že žádná z těchto číslic nemůže být větší než 7, musí být jak T, tak R alespoň 3. Z uvedených vztahů dále plyne, že Y musí být také alespoň 3 a U alespoň 4. Číslice 1 a 2 proto musí být některá dvě písmena z trojice M, D a O.

Z6–I–6

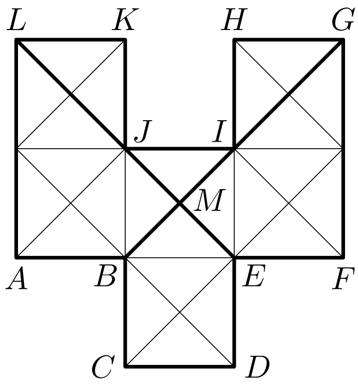
Ve dvanáctiúhelníku $ABCDEFGHIJKL$ jsou každé dvě sousední strany kolmé a všechny strany s výjimkou stran AL a GF jsou navzájem shodné. Strany AL a GF jsou oproti ostatním stranám dvojnásobně dlouhé. Úsečky BG a EL se protínají v bodě M a rozdělují dvanáctiúhelník na šest útvarů (tři trojúhelníky, dva čtyřúhelníky a jeden pětiúhelník). Čtyřúhelník $EFGM$ má obsah $7\,\mathrm{cm}^2$.

Určete obsahy ostatních pěti útvarů. (*E. Semerádová*)



Nápověda. Rozdělte obrázek na menší navzájem shodné útvary.

Možné řešení. Ze zadání víme, že dvanáctiúhelník $ABCDEFGHIJKL$ sestává ze šesti navzájem shodných čtverců. Každý z těchto čtverců může být dále rozdělen úhlopříčkami na čtyři navzájem shodné trojúhelníčky. Dvanáctiúhelník tedy sestává z 24 navzájem shodných trojúhelníčků, a to tak, že každý z výše jmenovaných útvarů je tvořen několika takovými trojúhelníčky:



Čtyřúhelník $EFGM$ sestává ze sedmi těchto trojúhelníčků a má obsah $7\,\mathrm{cm}^2$. Jeden trojúhelníček má proto obsah $1\,\mathrm{cm}^2$ a obsahy všech útvarů jsou

$$S_{IJM} = 1\,\mathrm{cm}^2, \quad S_{IGH} = S_{JKL} = 2\,\mathrm{cm}^2,$$
$$S_{CDEMB} = 5\,\mathrm{cm}^2, \quad S_{ABML} = S_{EFGM} = 7\,\mathrm{cm}^2.$$