I. kolo kategorie Z6

Z6–I–1

Jana a David trénují sčítání desetinných čísel tak, že každý z nich napíše jedno číslo, a tato dvě čísla pak sečtou. Poslední příklad jim vyšel 11,11. Davidovo číslo mělo před desetinnou čárkou stejný počet číslic jako za ní, Janino číslo také. Davidovo číslo bylo zapsáno navzájem různými číslicemi, Janino číslo mělo právě dvě číslice stejné.

Určete největší možné číslo, které mohl napsat David. (*M. Petrová*)

Nápověda. Kolik číslic před/za desetinnou čárkou mohla mít sčítaná čísla?

Možné řešení. Aby byl součet uvedeného tvaru, nemohlo mít žádné z čísel před/za desetinnou čárkou více než dvě číslice. Tedy jak Janino, tak Davidovo číslo bylo typu $**,**$ nebo $*,*$. Protože výsledné číslo mělo na místě setin nenulovou číslici, muselo mít alespoň jedno z čísel na místě setin — a tedy i na místě desítek — nenulovou číslici. Kdyby také druhé z čísel mělo stejné vlastnosti, byl by výsledek větší než 11,11. Druhé z čísel proto bylo typu $*,*$ a celý příklad můžeme zapsat takto:

$$\begin{array}{r} *\,*,*\;* \\ *,*\; \\ \hline 1\,1,1\;1 \end{array}$$

Protože pouze první číslo má na místě desítek a setin nenulové číslice, musí být obě tyto číslice 1. Celý příklad pak vypadá následovně:

$$\begin{array}{r} 1\,*,*\;1 \\ *,*\; \\ \hline 1\,1,1\;1 \end{array}$$

Protože Davidovo číslo bylo zapsáno navzájem různými číslicemi, je první číslo Janino a druhé Davidovo. Zajímá nás, které největší číslo mohl napsat David, neboli které nejmenší číslo mohla napsat Jana:

- Nejmenší myslitelné Janino číslo je 10,01, což ovšem nevyhovuje podmínce, že právě dvě číslice jsou stejné.
- Další myslitelné Janino číslo je 10,11, což nevyhovuje ze stejného důvodu.
- Další myslitelné Janino číslo je 10,21, v tomto případě by Davidovo číslo bylo 0,9 a tato možnost vyhovuje všem podmínkám ze zadání.

Největší číslo, které mohl David napsat, bylo číslo 0,9.

Z6–I–2

Pan Kostkorád vlastnil zahradu obdélníkového tvaru, na které postupně dláždil chodníky z jedné strany na druhou. Chodníky byly stejně široké, křížily se na dvou místech a jednou vydlážděná plocha se při dalším dláždění přeskakovala.

Když pan Kostkorád vydláždil chodník rovnoběžný s delší stranou, spotřeboval $228\,\mathrm{m}^2$ dlažby. Poté vydláždil chodník rovnoběžný s kratší stranou a spotřeboval $117\,\mathrm{m}^2$ dlažby.

Nakonec vydláždil ještě jeden chodník rovnoběžný s prvním chodníkem, tentokrát spotřeboval jen $219\,\mathrm{m}^2$ dlažby.

Určete rozměry Kostkorádovy zahrady. (*M. Petrová*)

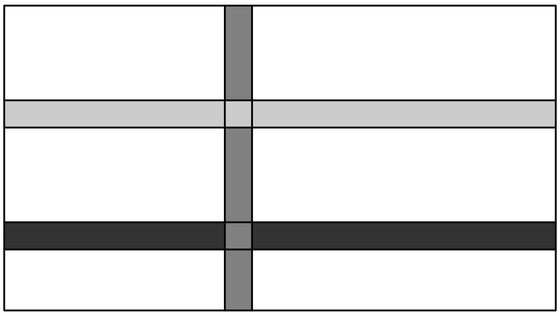
Nápověda. Proč bylo u třetího chodníku použito méně dlažby než u prvního?

Možné řešení. Načrtneme si, jak Kostkorádova zahrada vypadala (čísla označují pořadí dlážděných chodníků):

2.

1.

3.



První a třetí chodník mají stejné rozměry, tedy i stejnou plochu. U třetího chodníku se spotřebovalo méně dlažby než u prvního proto, že třetí chodník se v místě křížení s druhým chodníkem nedláždil (tam již byla dlažba položena). Tato společná část druhého a třetího chodníku je čtverec, jehož strana odpovídá šířce chodníku. Na vydláždění tohoto čtverce bylo spotřebováno

$$228 - 219 = 9\,(\mathrm{m}^2)$$

dlažby. Čtverec s obsahem $9\,\mathrm{m}^2$ má stranu dlouhou $3\,\mathrm{m}$, šířka všech tří chodníků je proto rovna $3\,\mathrm{m}$. Odtud a z množství dlažby použité na jednotlivé chodníky můžeme určit rozměry zahrady:

Na první chodník se spotřebovalo $228\,\mathrm{m}^2$ dlažby, což je skutečný obsah plochy chodníku. Délka zahrady je

$$228 : 3 = 76\,(\mathrm{m}).$$

Na druhý chodník se spotřebovalo $117\,\mathrm{m}^2$ dlažby, což je o $9\,\mathrm{m}^2$ méně než skutečný obsah plochy chodníku (společný čtverec s prvním chodníkem byl již vydlážděn). Šířka zahrady je

$$(117 + 9) : 3 = 126 : 3 = 42\,(\mathrm{m}).$$

Rozměry Kostkorádovy zahrady jsou $76\,\mathrm{m}$ a $42\,\mathrm{m}$.

Poznámka. Pokud řešitel při výpočtu šířky zahrady nepřipočítá oněch $9\,\mathrm{m}^2$, obdrží chybný rozměr $39\,\mathrm{m}$. Takové řešení hodnoťte nejvýše stupněm „dobře“.

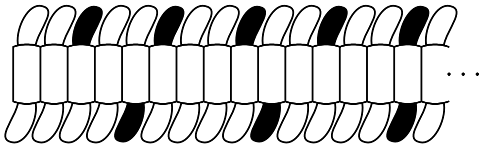
Z6–I–3

Mnohonožka Mirka sestává z hlavy a několika článků, na každém článku má jeden pár nohou. Když se ochladilo, rozhodla se, že se obleče. Proto si na třetím článku od konce a potom na každém dalším třetím článku oblékla ponožku na levou nožku. Podobně si na pátém článku od konce a potom na každém dalším pátém článku oblékla ponožku na pravou nožku. Poté zjistila, že na 14 článcích jí zůstaly obě nohy bosé.

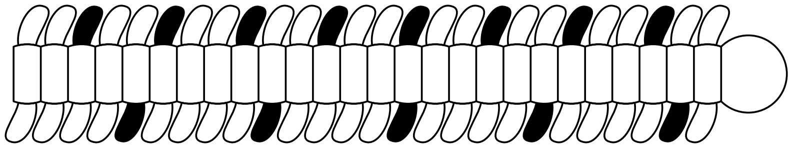
Zjistěte, kolik celkem nohou mohla mít mnohonožka Mirka; určete všechny možnosti. (*E. Novotná*)

Nápověda. Kolikátý článek odzadu má jako první obě nohy oblečené?

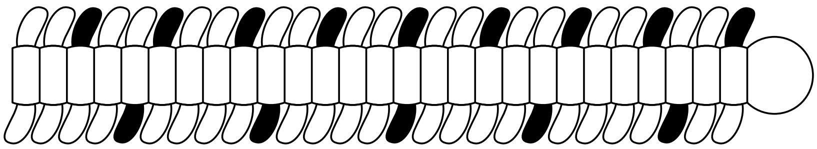
Možné řešení. Naznačme několik posledních článků mnohonožky Mirky (zleva doprava), horní řádek představuje levé nohy, spodní řádek pravé. Oblečené nohy vyznačujeme černě, bosé nohy bíle, a to tak dlouho, dokud nejsou na jednom článku obě nohy oblečené — poté se vzor opakuje:



Kdyby měla mnohonožka 15 článků, byly by na 8 článcích obě nohy bosé. Pokračujeme dále, dokud nedostaneme 14 článků s oběma nohami bosými:



Pokračujeme dále, pokud je počet článků s oběma nohama bosými stejný:



Mnohonožka Mirka měla buď 26, nebo 27 článků, tedy buď 52, nebo 54 nohou.

Z6–I–4

Čtyři rodiny byly na společném výletě. V první rodině byli tři sourozenci, a to Alice, Bětka a Cyril. V druhé rodině byli čtyři sourozenci, a to David, Erika, Filip a Gábina. V třetí rodině byli dva sourozenci, a to Hugo a Iveta. Ve čtvrté rodině byli tři sourozenci, a to Jan, Karel a Libor. Cestou se děti rozdělily do skupin tak, že v každé skupině byly všechny děti se stejným počtem bratrů a nikdo jiný.

Jak se mohly děti rozdělit? Určete všechny možnosti. (*V. Hucíková*)

Nápověda. Spočítejte bratry každého dítěte.

Možné řešení. V každé skupině jsou jenom děti se stejným počtem bratrů a počet bratrů každého dítěte je ze zadání známý. Proto se děti mohly rozdělit jediným možným způsobem. Stačí postupně určit počty bratrů každého dítěte a utvořit odpovídající skupiny.

- Alice a Bětka mají jednoho bratra, Cyril žádného.
- Erika a Gábina mají dva bratry, David a Filip jednoho.
- Iveta má jednoho bratra, Hugo žádného.
- Jan, Karel a Libor mají dva bratry.

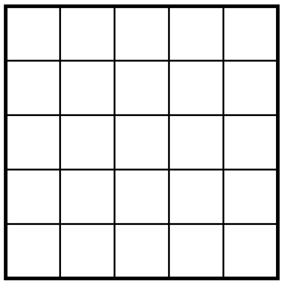
Děti se tedy rozdělily do tří skupin:

- Erika, Gábina, Jan, Karel, Libor.
- Alice, Bětka, David, Filip, Iveta.
- Cyril, Hugo.

Z6–I–5

Jirka si nakreslil čtvercovou síť s 25 čtverečky, viz obrázek. Poté chtěl každý čtvereček vybarvit tak, aby stejně vybarvené čtverečky neměly společný žádný vrchol.

Kolik nejméně barev musel Jirka použít? (*M. Dillingerová*)



Nápověda. Začněte v některém rohovém čtverečku.

Možné řešení. Pokud je levý horní čtvereček vybarven nějakou barvou, musí být okolní tři čtverečky vybarveny navzájem různými barvami. Jirka musel použít aspoň 4 barvy, které budeme značit číslicemi od 1 do 4:

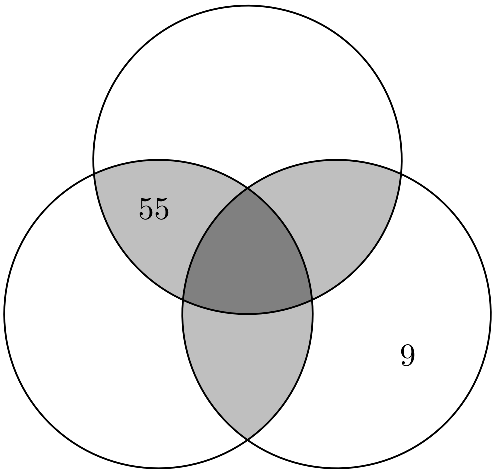
1	2			
4	3			

Nyní potřebujeme zjistit, zda čtyři barvy stačí na vybarvení zbytku sítě podle uvedených pravidel, či nikoli. Postupně zjistíme, že čtyři barvy skutečně stačí:

1	2	1	2	1
4	3	4	3	4
1	2	1	2	1
4	3	4	3	4
1	2	1	2	1

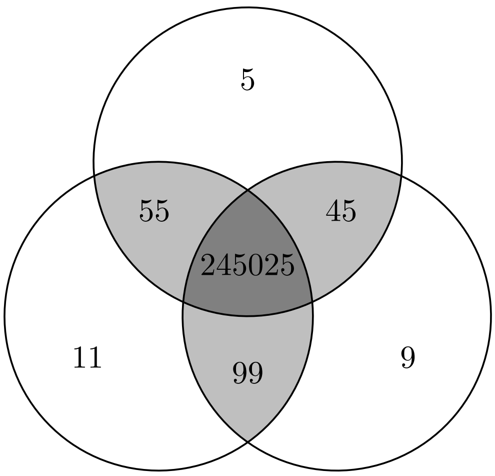
Z6–I–6

Do prázdných polí v následujícím obrázku doplňte celá čísla větší než 1 tak, aby v každém tmavším políčku byl součin čísel ze sousedních světlejších políček: (*T. Salčák*)



Nápověda. Mohou být v nevyplněných bílých polích jakákoli čísla?

Možné řešení. V nevyplněných bílých polích mohou být napsány jen takové dvojice celých čísel, jejichž součin je 55 a z nichž každé je větší než 1. Tomu vyhovuje pouze dvojice 5 a 11 a tím jsou také určena čísla v ostatních nevyplněných polích: ve světle šedých polích dostáváme $9 \cdot 5 = 45$ a $9 \cdot 11 = 99$, v nejtmavším pak $55 \cdot 45 \cdot 99 = 245\,025$.



Poznámka. Čísla 5 a 11 lze do obrázku vyplnit dvojím způsobem, což je v této úloze nepodstatné. Na hodnocení nemá vliv, zda řešitel uvažuje obě možnosti, nebo jenom jednu.