

Rubikovy-Čertovy kostky

Pavel Stríž, pavel@striz.cz

Mikuklášské setkání, Praha
5. prosince 2023

Osnova povídání

- 1) Motivy k práci. Širší pokusy.
- 2a) Začlenění Rubikovy kostky.
- 2b) Fakta a zajímavosti k Rubikově kostce.
- 2c) Výpočet kombinací, neplatné kostky 1/2, generování jedné kostky, ukázky užití.
- 3a) Optický klam 3D krychlí.
- 3b) Neplatné kostky 2/2.
- 3c) Generování 3 stěn.
- 3d) Co by se dalo zlepšit?
- 4) Otevřené problémy. Nejbližší krok.

1) Motivy k práci

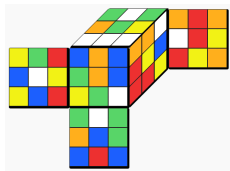
- ▶ Oprašování a studium kombinatoriky.
- ▶ Ověření si známých výpočtů.
- ▶ Shrnutí zkušeností do knih(y).
- ▶ Řešení starých problémů, bádání nad novými.
Volba čísla 1 až počet možností, získání situace a zpět (ranking, unranking).
 - ▶ Bridž (vyřešeno), ale existují karetní koncovky.
 - ▶ Válka (vyřešeno), ale je tam kombinatorika.
 - ▶ Lodě a její varianty.
 - ▶ Pexeso, mahjong, šachy, go, mozaika, ...
 - ▶ Klondike, FreeCell, Spider, ...
 - ▶ Sudoku (lze to, řeším), ale existují překryvy,
 - ▶ Rubikova kostka, ale je v tom ukrytý Čert.

1) Širší pokusy

Má širší kombinatorická zkoumání:

- ▶ výpočty s rekurzí (rozložení, pozastavení),
úloha: adventní kalendář,
- ▶ multifaktoriály, $!!$, $!!!$, ... vs $(!)!$, $((!)!)!$, ...
úloha: hra Scrabble,
- ▶ dismutace (dearrangement),
úloha: dárky na oslavě,
- ▶ princip inkluze a exkluze,
úloha: Mosaic problem,
- ▶ vytvářející funkce,
úloha: karetní hra Spider.

Rubikovy kostky



2a Začlenění Rubikovy kostky

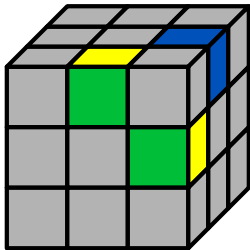
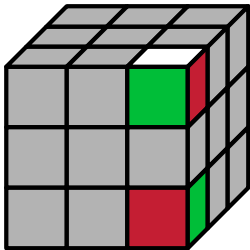
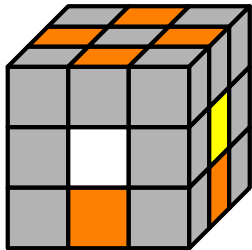
- ▶ Předchůdce: **hra 15**, období Sam Loyd (1841–1911), cca 19. století, problém parity.
- ▶ **Rubikova kostka**, období Martin Gardner (1914–2010), cca 20. století, teorie grup.
- ▶ Nástupce: **sudoku**, období D. E. Knuth (1938–), cca 21. století, Algoritmus X, Dancing Links (DLX), X with Color Controls (XCC).
- ▶ **Parker Square?, Wordle?**, období YouTube?, Stand-up Maths (Matt Parker, AUS, 1980–), 3Blue1Brown (Grant Sanderson, USA, 1997–), nebo **geometrické magické čtverce?** (po puzzle a tangramech) ...

2b Zajímavosti k Rubikově kostce

- ▶ Božské číslo je 20 (2010, Tom Rokicki, mj. autor dvips), resp. 26, počítáme-li čtvrtky tahů. tomas.rokicki.com/rubik20.pdf
- ▶ Nalezen Hamiltonovský cyklus, 2011/2012, <https://bruce.cubing.net>.
- ▶ Světový rekord řešení virtuální kostky, hrana 2^{16} , youtube.com/watch?v=y7J3sNR8aC4.
- ▶ Ověření řešitelnosti: GAP, online (<https://rubiks-cube-solver.com/>), balík v Linuxu rubiks, appky, ...
- ▶ T_EXový balíček, 2014–2018, rubikcube.

2c Neplatné kostky 1/2

- ▶ Barva se celkově opakuje víc jak devětkrát, 7. barva kdekoliv.
- ▶ Středy: Barva je užita vícekrát, protilehlé barvy jsou vedle sebe.
- ▶ Hrany: Opakuje se vícekrát, hrana a její rotace, hrana neexistující, má dvě barvy.
- ▶ Rohy: Neexistující roh, chybně barvy rohu, roh se opakuje vícekrát, má dvě stejné barvy.



2c Počet kombinací

- Obecný vzorec pro délku hrany n , $n > 1$:

$$N = \frac{8!}{8} \cdot \frac{3^8}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(8 \cdot 3 \cdot \frac{2^{12} \cdot 12!}{2 \cdot 2}\right)^{n \bmod 2} \cdot 24!^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \cdot \left(\frac{24!}{4!^6}\right)^{\lfloor (\frac{n-2}{2})^2 \rfloor}$$

- Zohlednění parity rotace rohů, $\sum \bmod 3 = 0$, parity rotace hran, $\sum \bmod 2 = 0$, a celkové parity permutací rohů a hran, která musí být stejná (obě 0, nebo 1).

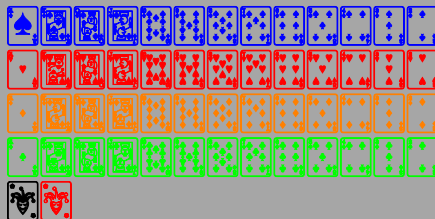
$$\begin{aligned} n = 3, \quad N &= \frac{8! \cdot 3^8}{3} \cdot \frac{2^{12} \cdot 12!}{2 \cdot 2} \cdot 1 \cdot 1 = \\ &= 43\,252\,003\,274\,489\,856\,000 \approx \\ &\approx 4,3 \cdot 10^{19}; \text{ 43 miliard miliard.} \end{aligned}$$

1 (0,0,1)	2 (1,0,1)	3 (2,0,1)
4 (0,1,1)	5 (1,1,1)	6 (2,1,1)
7 (0,2,1)	8 (1,2,1)	9 (2,2,1)

Mate-In-1; Fork; Pin; Mate-In-2; Counter-Threat; Zugzwang; Bishop Pin; Battery; Remove the Defender; Hanging Piece; Knight Fork; Discovered Attack; Backrank; Pawn Fork; Mate-In-3+; Mating Net; Pawn Breakthrough; King Endgame Tactics; Zwischenzug; Skewer; Bishop-Queen Battery; Double Check; f2/f7 Weakness; Rook-Rook Battery; Rook Pin; Absolute Pin; Tempo Tactics; Desperado; Passed Pawns; Rooks on the 7th; Decoy; Queen Fork; Smothering; Situational Pin; Overloading the Defender; X-Ray; Bishop Fork; Pawn Structure Destruction; Rook Fork; Queen Pin; Greek Gift; Deflection; Clearance; Scholar's Mate; Interference; Perpetual Check; Windmill; Hit-and-Run; Stalemates; Trapped Piece; King Fork; Cross-Check; Underpromotion; Alekhine's Gun.

10 (0,0,2)	11 (1,0,2)	12 (2,0,2)	19 (0,0,3)	20 (1,0,3)	21 (2,0,3)	28 (0,0,4)	29 (1,0,4)	30 (2,0,4)	37 (0,0,5)	38 (1,0,5)	39 (2,0,5)
13 (0,1,2)	14 (1,1,2)	15 (2,1,2)	22 (0,1,3)	23 (1,1,3)	24 (2,1,3)	31 (0,1,4)	32 (1,1,4)	33 (2,1,4)	40 (0,1,5)	41 (1,1,5)	42 (2,1,5)
16 (0,2,2)	17 (1,2,2)	18 (2,2,2)	25 (0,2,3)	26 (1,2,3)	27 (2,2,3)	34 (0,2,4)	35 (1,2,4)	36 (2,2,4)	43 (0,2,5)	44 (1,2,5)	45 (2,2,5)

46 (0,0,6)	47 (1,0,6)	48 (2,0,6)
49 (0,1,6)	50 (1,1,6)	51 (2,1,6)
52 (0,2,6)	53 (1,2,6)	54 (2,2,6)



Nejmenší hodnota

$$I = 0$$

<https://rubiks-cube-solver.com/solution.php?cube=0>

1111111112222222223333333333444444444555555555666666666

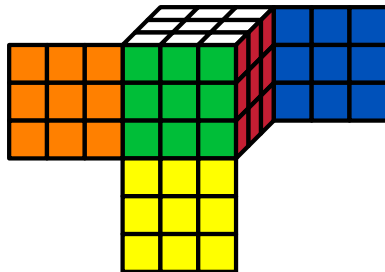
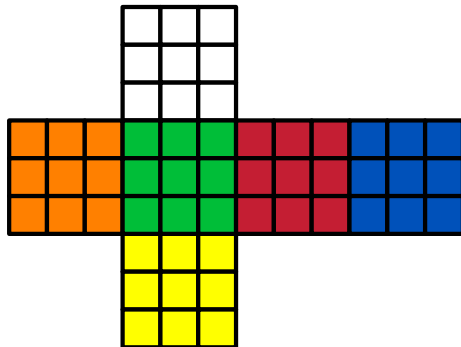
rubiks_cubex 1111111112222222223333333333444444444555555555666666666000000

rubiks_dikcube 111111111222333444555222333444555222333444555666666666

rubiks_optimal Enter

UF UR UB UL DF DR DB DL FR FL BR BL UFR URB UBL ULF DRF DFL DLB DBR Enter

[1,...,12],[1,2,3,4,5,6,7,8],[0,0,0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],True
[1,...,12],[1,2,3,4,5,6,7,8],[0,0,0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1],False
[1,...,12],[1,2,3,4,5,6,7,8],[0,0,0,0,0,0,0,0,1],[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],False
[1,...,12],[1,2,3,4,5,6,7,8],[0,0,0,0,0,0,0,0,1],[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1],False
[1,...,12],[1,2,3,4,5,6,7,8],[0,0,0,0,0,0,0,0,2],[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],False
[1,...,12],[1,2,3,4,5,6,7,8],[0,0,0,0,0,0,0,0,2],[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1],False
[1,...,12],[1,2,3,4,5,6,8,7],[0,0,0,0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],False
[1,...,12],[1,2,3,4,5,6,8,7],[0,0,0,0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1],False
[1,...,12],[1,2,3,4,5,6,8,7],[0,0,0,0,0,0,0,0,1],[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],False
[1,...,12],[1,2,3,4,5,6,8,7],[0,0,0,0,0,0,0,0,1],[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1],False
[1,...,12],[1,2,3,4,5,6,8,7],[0,0,0,0,0,0,0,0,2],[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],False
[1,...,12],[1,2,3,4,5,6,8,7],[0,0,0,0,0,0,0,0,2],[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1],False



Největší hodnota

$I = N - 1 = 43252003274489855999$

<https://rubiks-cube-solver.com/solution.php?cube=0>

225414325336121165454532162656141163236453164223365544

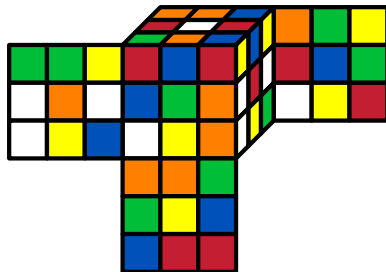
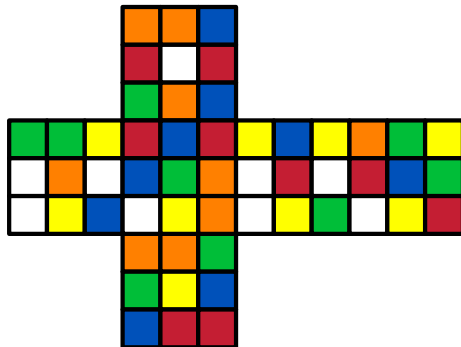
rubiks_cubex 225414325336121165454532162656141163236453164223365544000000

rubiks_dikcube 225414325336454656236121532141453165162163164223365544

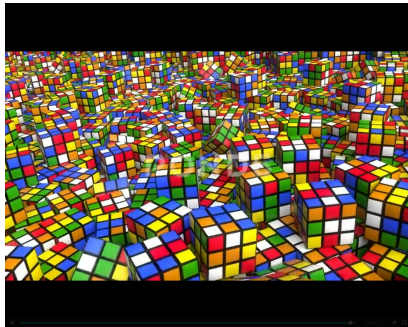
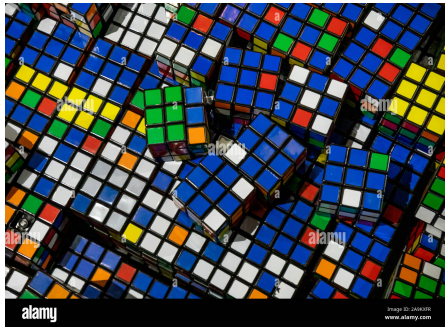
rubiks_optimal Enter

LB RB LF RF LD BD RD FD LU BU RU FU BRD BDL LDF FDR FUL LUB BUR RUF Enter

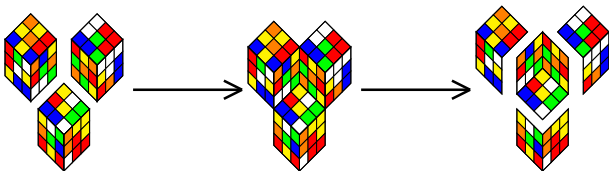
[12,...,1],[8,7,6,5,4,3,2,1],[2,2,2,2,2,2,2,0],[1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,0],False
[12,...,1],[8,7,6,5,4,3,2,1],[2,2,2,2,2,2,2,0],[1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1],False
[12,...,1],[8,7,6,5,4,3,2,1],[2,2,2,2,2,2,2,1],[1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,0],False
[12,...,1],[8,7,6,5,4,3,2,1],[2,2,2,2,2,2,2,1],[1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1],True
[12,...,1],[8,7,6,5,4,3,2,1],[2,2,2,2,2,2,2,2],[1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,0],False
[12,...,1],[8,7,6,5,4,3,2,1],[2,2,2,2,2,2,2,2],[1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1],False
[12,...,1],[8,7,6,5,4,3,1,2],[2,2,2,2,2,2,2,0],[1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,0],False
[12,...,1],[8,7,6,5,4,3,1,2],[2,2,2,2,2,2,2,0],[1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1],False
[12,...,1],[8,7,6,5,4,3,1,2],[2,2,2,2,2,2,2,1],[1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,0],False
[12,...,1],[8,7,6,5,4,3,1,2],[2,2,2,2,2,2,2,1],[1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1],False
[12,...,1],[8,7,6,5,4,3,1,2],[2,2,2,2,2,2,2,2],[1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,0],False
[12,...,1],[8,7,6,5,4,3,1,2],[2,2,2,2,2,2,2,2],[1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1],False



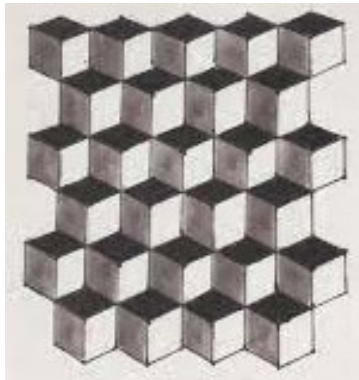
2c Ukázky užití



Rubikovy-Čertovy kostky



3a Optický klam 3D krychlí

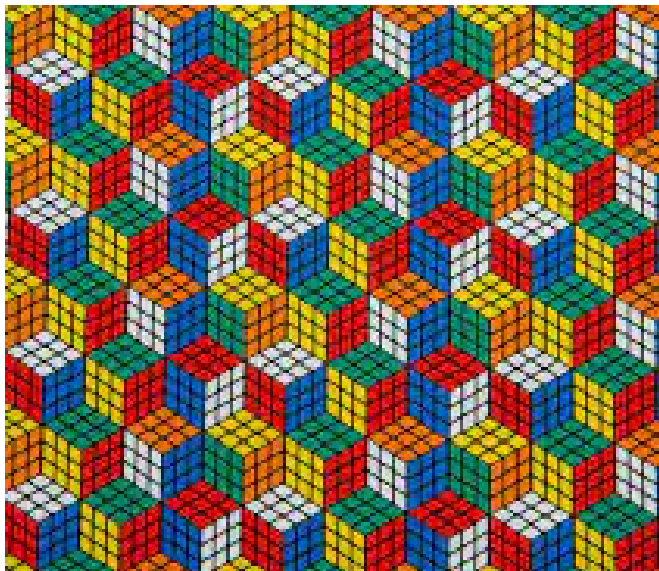


Zdroj: https://www.candyconceptsinc.com/Rubiks-Cube-Tin--12ct_p_11499.html.

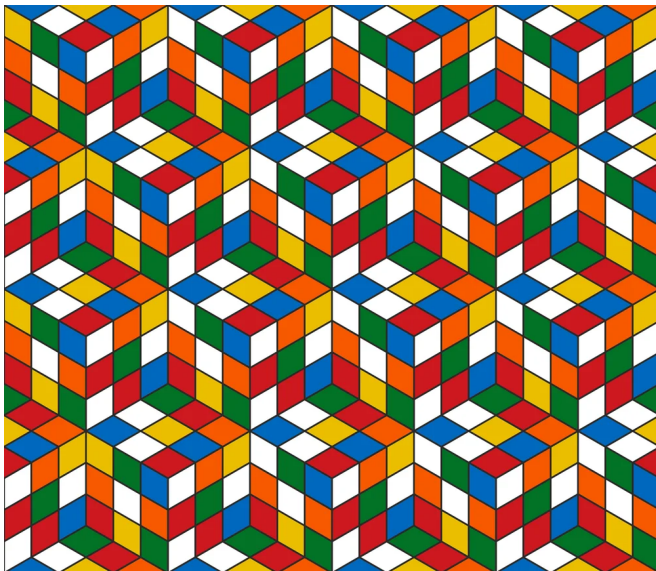
3b Neplatné kostky 2/2



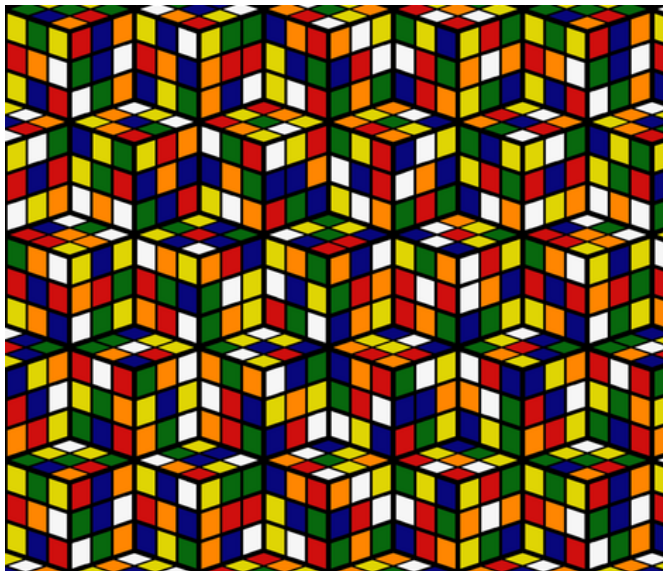
3b Neplatné kostky 2/2



3b Neplatné kostky 2/2



3b Neplatné kostky 2/2



3b Neplatné kostky 2/2
3c Generování 3 stěn

3c Generování 3 stěn

Postup (1. řádek):

- ▶ 1/ Vygeneruji 1. Rubikovu kostku (bez).
- ▶ 2/ Vygeneruji 1. Čertovu kostku (omezení horní stěna z Rubikovy).
- ▶ Vygeneruji 2. Rubikovu kostku (omezení přední stěna z Čertovy), 2. Čertovu, 3. Rubikovu, atd.

Postup (další řádky), generuji tři kostky zároveň:

- ▶ 3/ Neexistuje-li, tak Rubikova (omezení horní stěna z Čertovy předchozího řádku).
- ▶ 4/ Čertova (omezení horní stěny z Rubikovy).
- ▶ 5/ Rubikova (omezení přední stěny z Čertovy současného řádku a horní stěny z další Čertovy předchozího řádku).

3c Generování 3 stěn

Vyřazuji nevhodné kostky, dojdou-li mi možnosti:

- ▶ Nemám-li už vhodný roh na splnění zbylých podmínek.
- ▶ Nemám-li už vhodnou hranu na splnění zbylých podmínek.

Při generování trojice u dalších řádků:

- ▶ Třetí, čtvrtá či pátá není vygenerována.
- ▶ Nevhodný střed u čtvrté kostky vůči páté.
- ▶ Nedaří se vygenerovat pátou kostku.

3d Co by se dalo zlepšit?

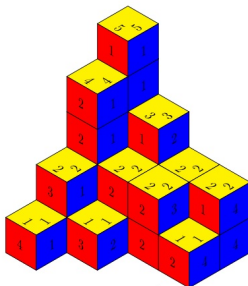
- ▶ Plnit kostku prvně dle omezení, nikoliv dle předem zvoleného pořadí rohů a hran.
- ▶ Generování dle pravidel bez vyřazování. Lze to?
- ▶ Mít nezávislý kontrolní mechanismus.
- ▶ Chtít na každé stěně barvu minimálně (0, 1) a maximálně dvakrát?
Při 0: jedna barva nebude, jedna barva jedenkrát, čtyři dvakrát.
Při 1: tři barvy jedenkrát, tři barvy dvakrát.
- ▶ Chtít různé barvy vedle a nad sebou?
Stěnu lze složit ze dvou barev (šachovnice).

4 Otevřené problémy

- ▶ Jeden z kategorie typografických.
- ▶ Jeden z kategorie vizualizačních.
- ▶ Dva kombinatorické rozpracované, a,
- ▶ poznámka o domino efektu.
- ▶ Středně těžký.
- ▶ Těžký.

4 Otevřené problémy – 1.

Typografický. Lze vysázet čísla ve směru dle Rubikových či Čertových kostek?

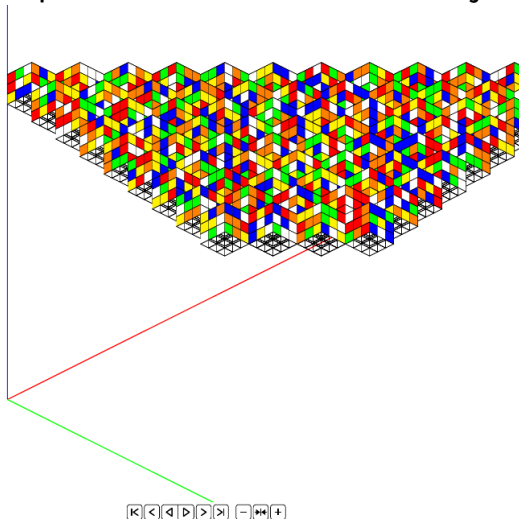


+30° rotate; +30° slant: 
-30° rotate; -30° slant: 
-30° rotate; +30° slant: 
+30° rotate; -30° slant: 

<https://tex.stackexchange.com/questions/254010/placing-text-on-face-of-3d-cube>

4 Otevřené problémy – 2.

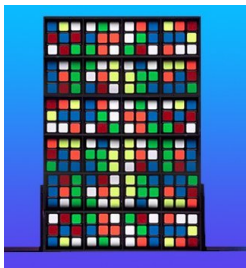
2D na 3D. Lze vizualizovat výstupy ve 3D?
TikZ, Asymptote, Jmol, Blender3D, D3js.



4 Otevřené problémy – 3.

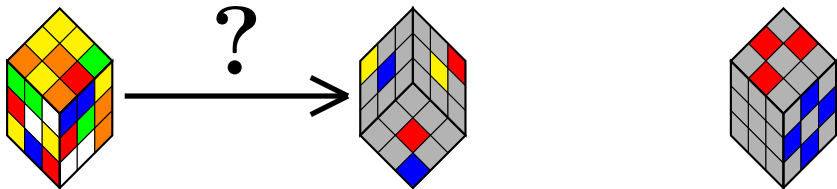
Dogenerování kostky. Proč? Pak jsme schopni fyzickou Rubikovu kostku zamíchat dle návodu.

- ▶ Částečné zadání barev.
- ▶ Zadání jedné ze stěn.
- ▶ Zadání tří stěn. Apod.

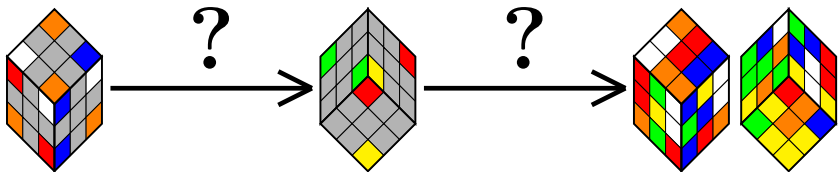


4 Otevřené problémy – 3., pokr.

- ▶ Pro $n = 3$ nemáme nestředové hrany ani středové části. Ty máme až pro $n \geq 4$.
- ▶ Středy, hrany a rohy jsou nezávislé.
- ▶ Ze tří středů určíme i zbylé.
- ▶ 3 hrany známe kompletně, 6 z poloviny, 3 vůbec.
- ▶ 1+3 rohy známe kompletně, u 3 jen jednu barvu, poslední vůbec.



- ▶ Hrana s červenou: může být jen bílá či zelená.
- ▶ Hrana s modrou: ne modrá, zelená ani červená.
- ▶ Hrana s bílou: nemůže být bílá a žlutá.
- ▶ Dvě hrany se žlutou jsou užity. Zbylé dvě budou bílá a oranžová, nevíme umístění.



<https://rubiks-cube-solver.com/solution.php?cube=0463226566616514354245153165432164134623332351552442211>

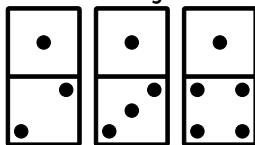
- ▶ Kompletně viděná je známá, rotace 2.
- ▶ Viděné ze 2/3 určují tři další, rotace $0 + 2 + 0$.
- ▶ Tři oranžové zablokují tři ze zbylých čtyř, součet rotací je vždy 1.
- ▶ Poslední roh musí být YGR (DRF), její rotace je $6 - 5 = 1$, resp.
 $(5 + x) \bmod 3 = 0, x \in \{0, 1, 2\}$.

4 Otevřené problémy – 4.

- ▶ Jsme schopni dopočítat počet kombinací u částečného zadání Rubikovy kostky?
- ▶ Máme stejný počet kombinací u viděných polovin Rubikových kostek?
- ▶ Pokud nikoliv, jaká je nejmenší a největší možná kombinace?

4 Otevřené problémy – 4., pokr.

Domino efekt (barvy hran Rubika), zakryjeme-li horní poloviny, kombinace je jedna. Zakryjeme-li spodní poloviny, kombinací je $3! = 6$. Sazba utfsym.



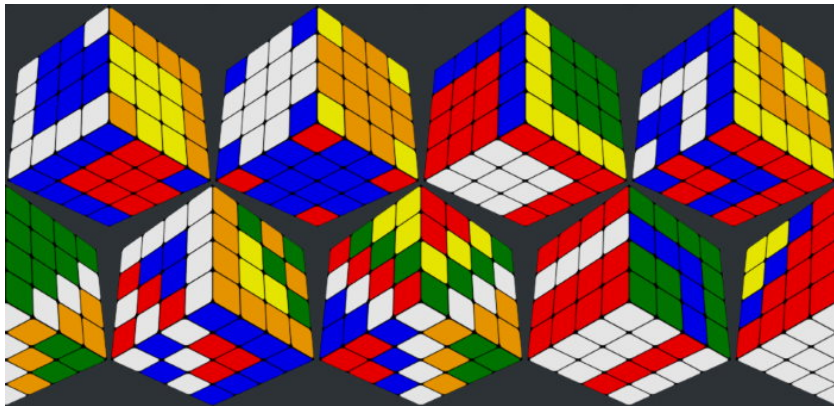
U karet obdoba:

- ▶ Z balíčku vyberme trefovou kartu.
- ▶ Poté vyberme trojku.
- ▶ Poté vyberme srdcovou kartu.
- ▶ Poté vyberme trojku.

Kolik zůstává v balíčku trojek? Žádná, 1, nebo 2.

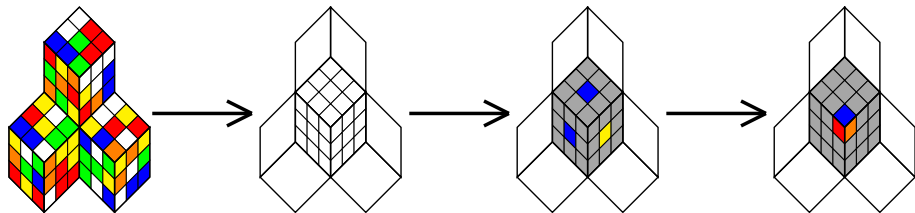
4 Otevřené problémy – 5.

Můžeme generování Rubikových-Čertových kostek zobecnit pro Rubikovy kostky $4 \times 4 \times 4$ a větší?



4 Otevřené problémy – 6.

Můžeme dogenerovat zadní části Rubikových kostek tak, aby byly platné i Čertovy kostky jako v části přední? Např. příprava stěny ze skutečných Rubikových kostek s možností vidět stěnu zepředu i zezadu. Pohled skrz.



4 Nejblíže krok – BONUS

<https://github.com/ShellPuppy/RCube>

Program v C++ umí zamíchat a vyřešit Rubikovu kostku pro $n = 1$ až $n = 2^{16}$.

Myšlenka podat zprávu. Pouštím se do zamíchání Rubikovy kostky $n = 2^{17}$ (sudé číslo), co je k tomu potřeba? ...

- ▶ Fix pozice (1/8) a rotace prvního rohu (1/3),
- ▶ pozice 6 rohů ($8! \cdot 3^8$),
- ▶ parita posledního rohu (1/3),
- ▶ středové hrany po 8 ($24!^{65535}$),
- ▶ a středové části po 4 ($((24!/4!^6)^{4294836225})$).

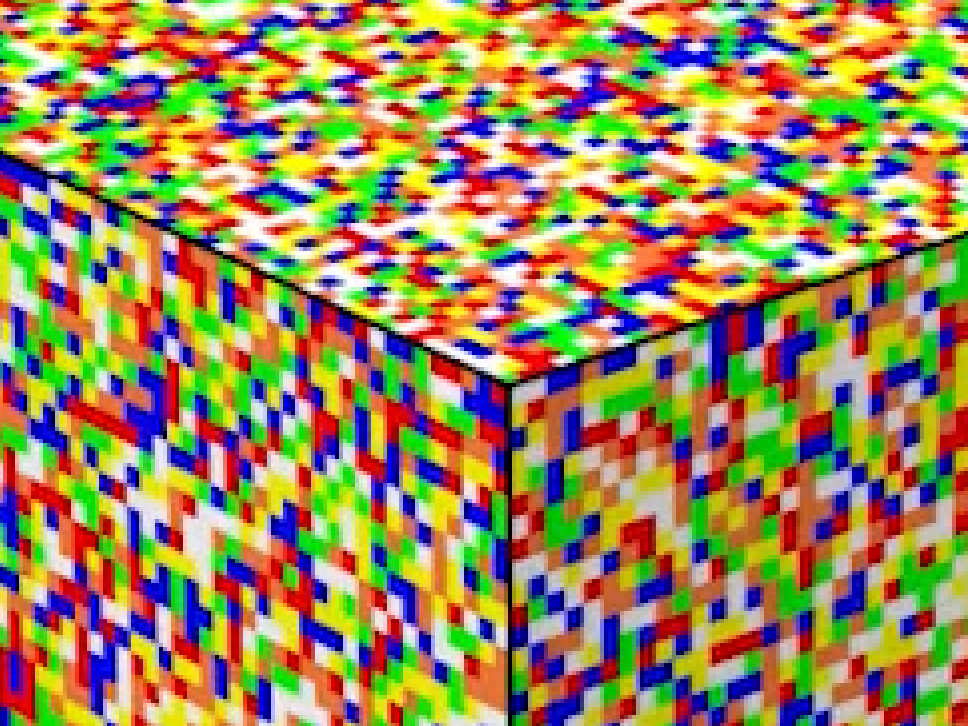
4 Nejblíže krok

Rozkres stěny pro $N = 8, 9$.

R	Z	Y	X	X	Y	Z	R
Z	1	4	5	8	6	1	Z
Y	6	2	7	9	2	4	Y
X	8	9	3	3	7	5	X
X	5	7	3	3	9	8	X
Y	4	2	9	7	2	6	Y
Z	1	6	8	5	4	1	Z
R	Z	Y	X	X	Y	Z	R

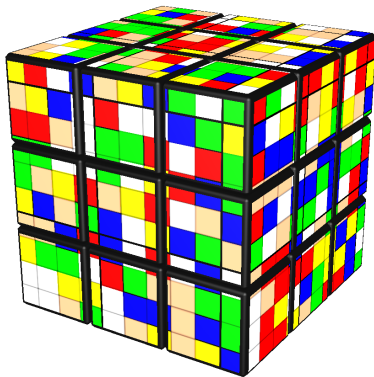
R	A	B	C	X	C	B	A	R
A	1	2	3	I	7	4	1	A
B	4	5	6	J	8	5	2	B
C	7	8	9	K	9	6	3	C
X	I	J	K	O	K	J	I	X
C	3	6	9	K	9	8	7	C
B	2	5	8	J	6	5	4	B
A	1	4	7	I	3	2	1	A
R	A	B	C	X	C	B	A	R

Volit číslo 1 až počet kombinací? Obrovská čísla...
Jít po blocích hran a středových částí? Ukládání do souborů a pak jejich rotace a spojování?...



Děkuji za pozornost!

Poslední čertovina: Rubik $n = 10$ jako ~~šest~~
tři obrázky pro hratelného Rubika $n = 3$.



Obrázky stěn získány přes program RCube,
následné složení ve hře Pybik.



Jsou-li případné dotazy a postřehy!
pavel@striz.cz