

VÁNOČNÍ DÁREK A PF2025!
CHRISTMAS GIFT AND PF2025!

Pavel Stríž

E-mail: pavel@striz.cz

Vážené kolegyně, vážení kolegové,

v zoufalé snaze upočítat masivní výpočetní problém pro mého kamaráda, Štefana Pešky z Žiliny, jsem si založil malé výpočetní centrum. Kdyby někdo potřeboval výpočetní sílu, ozvěte se mi. Je to takový malý vánoční dárek.

Ale mnohem větší dárek je objev serveru <https://compute.cudo.org/>, kde užití vCPU a vGPU je sice zpoplatněné, ale rozumně, počítá to stabilně a bez intervencí od administrátorů či majitelů serverů. Bez větších problémů jsem počítal na více než 250 silných jádrech a nezbankrotoval jsem. Mohu s klidným svědomím doporučit!

Měl jsem takový příjemný pocit, že jsem objevil „diru“ ve výpočetním světě. Nabídka silných virtuálních strojů je drahá, u menších firem jsem se setkal s tím, že mi výpočty majitelé mazali, a ještě měli tu drzost mi psát, že mi systém někdo naboural, či mi snižovali výkon (dokonce až na třetinu).

Objevená firma se zaměřuje na výpočty přes vGPU, ale vCPU nabízí, protože ty na řízení vGPU potřebují. Nevadilo jim, že jsem jim na týdny výpočetné zabral všechny volné vCPU.

S rokem 2024 se tradičně rozloučíme drobnou symbolickou novoročenkou. Jedná se o nápad z nápopěv v sudoku vytvořit písmenka, a to tak, aby sudoku byla platná a hratelná. Zde je PF2025! pro příznivce této logické hry plus řešení. Každé sudoku je řešitelné samostatně, nejsou propojená.

<table><tr><td>5</td><td>3</td><td>4</td><td>2</td><td>6</td></tr><tr><td>3</td><td>5</td><td>4</td><td>2</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td></tr><tr><td>4</td><td>3</td><td>6</td><td>5</td><td>2</td></tr><tr><td>6</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td>2</td><td>6</td><td>5</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td><td>3</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>4</td><td>3</td><td>5</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>2</td><td>6</td><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td><td>5</td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>5</td><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>5</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td><td>3</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>4</td><td>5</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>2</td></tr><tr><td>5</td><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>5</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td><td>3</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>4</td><td>5</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>2</td></tr><tr><td>5</td><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>5</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td><td>3</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>4</td><td>5</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>2</td></tr><tr><td>5</td><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>5</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td><td>3</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>4</td><td>5</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>2</td></tr><tr><td>5</td><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>5</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td><td>3</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>4</td><td>5</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>2</td></tr><tr><td>5</td><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>5</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td><td>3</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>4</td><td>5</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>2</td></tr><tr><td>5</td><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>5</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td><td>3</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>4</td><td>5</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>2</td></tr><tr><td>5</td><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>5</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td><td>3</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>4</td><td>5</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>2</td></tr><tr><td>5</td><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>5</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td><td>3</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>4</td><td>5</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>2</td></tr><tr><td>5</td><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>5</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td><td>3</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>4</td><td>5</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>2</td></tr><tr><td>5</td><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>5</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td><td>3</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>4</td><td>5</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>2</td></tr><tr><td>5</td><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>5</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td><td>3</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>4</td><td>5</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>2</td></tr><tr><td>5</td><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>5</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td><td>3</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>4</td><td>5</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>2</td></tr><tr><td>5</td><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>5</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td><td>3</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>4</td><td>5</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>2</td></tr><tr><td>5</td><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>5</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td><td>3</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>4</td><td>5</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>2</td></tr><tr><td>5</td><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>5</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td><td>3</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>4</td><td>5</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>2</td></tr><tr><td>5</td><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>5</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td><td>3</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>4</td><td>5</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>2</td></tr><tr><td>5</td><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>5</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td><td>3</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>4</td><td>5</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>2</td></tr><tr><td>5</td><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>5</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td><td>3</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>4</td><td>5</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>2</td></tr><tr><td>5</td><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>5</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td><td>3</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>4</td><td>5</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>2</td></tr><tr><td>5</td><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>5</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td><td>3</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>4</td><td>5</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>2</td></tr><tr><td>5</td><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>5</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td><td>3</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>4</td><td>5</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>2</td></tr><tr><td>5</td><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>5</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td><td>3</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>4</td><td>5</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>2</td></tr><tr><td>5</td><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>5</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td><td>3</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>4</td><td>5</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>2</td></tr><tr><td>5</td><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>5</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td><td>3</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>4</td><td>5</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>2</td></tr><tr><td>5</td><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>4</td><td>2</td></tr><</table>	5	3	4	2	6	3	5	4	2	6	2	6	5	4	3	4	3	6	5	2	6	2	3	5	4	3	4	2	6	5	5	6	4	3	2	2	5	3	6	4	6	4	3	5	2	4	2	6	3	5	3	6	5	2	4	5	2	4	3	6	2	4	3	5	6	6	3	5	4	2	4	5	6	2	3	3	2	5	4	6	5	4	6	3	2	2	3	5	6	4	6	5	4	3	2	4	6	3	2	5	3	2	4	5	6	5	6	2	3	4	2	5	3	6	4	6	4	5	2	3	3	6	3	5	2	5	2	4	3	6	2	4	3	5	6	6	3	5	4	2	4	5	6	2	3	3	2	5	4	6	5	4	6	3	2	2	3	5	6	4	6	5	4	3	2	4	6	3	2	5	3	2	4	5	6	5	6	2	3	4	2	5	3	6	4	6	4	5	2	3	3	6	3	5	2	5	2	4	3	6	2	4	3	5	6	6	3	5	4	2	4	5	6	2	3	3	2	5	4	6	5	4	6	3	2	2	3	5	6	4	6	5	4	3	2	4	6	3	2	5	3	2	4	5	6	5	6	2	3	4	2	5	3	6	4	6	4	5	2	3	3	6	3	5	2	5	2	4	3	6	2	4	3	5	6	6	3	5	4	2	4	5	6	2	3	3	2	5	4	6	5	4	6	3	2	2	3	5	6	4	6	5	4	3	2	4	6	3	2	5	3	2	4	5	6	5	6	2	3	4	2	5	3	6	4	6	4	5	2	3	3	6	3	5	2	5	2	4	3	6	2	4	3	5	6	6	3	5	4	2	4	5	6	2	3	3	2	5	4	6	5	4	6	3	2	2	3	5	6	4	6	5	4	3	2	4	6	3	2	5	3	2	4	5	6	5	6	2	3	4	2	5	3	6	4	6	4	5	2	3	3	6	3	5	2	5	2	4	3	6	2	4	3	5	6	6	3	5	4	2	4	5	6	2	3	3	2	5	4	6	5	4	6	3	2	2	3	5	6	4	6	5	4	3	2	4	6	3	2	5	3	2	4	5	6	5	6	2	3	4	2	5	3	6	4	6	4	5	2	3	3	6	3	5	2	5	2	4	3	6	2	4	3	5	6	6	3	5	4	2	4	5	6	2	3	3	2	5	4	6	5	4	6	3	2	2	3	5	6	4	6	5	4	3	2	4	6	3	2	5	3	2	4	5	6	5	6	2	3	4	2	5	3	6	4	6	4	5	2	3	3	6	3	5	2	5	2	4	3	6	2	4	3	5	6	6	3	5	4	2	4	5	6	2	3	3	2	5	4	6	5	4	6	3	2	2	3	5	6	4	6	5	4	3	2	4	6	3	2	5	3	2	4	5	6	5	6	2	3	4	2	5	3	6	4	6	4	5	2	3	3	6	3	5	2	5	2	4	3	6	2	4	3	5	6	6	3	5	4	2	4	5	6	2	3	3	2	5	4	6	5	4	6	3	2	2	3	5	6	4	6	5	4	3	2	4	6	3	2	5	3	2	4	5	6	5	6	2	3	4	2	5	3	6	4	6	4	5	2	3	3	6	3	5	2	5	2	4	3	6	2	4	3	5	6	6	3	5	4	2	4	5	6	2	3	3	2	5	4	6	5	4	6	3	2	2	3	5	6	4	6	5	4	3	2	4	6	3	2	5	3	2	4	5	6	5	6	2	3	4	2	5	3	6	4	6	4	5	2	3	3	6	3	5	2	5	2	4	3	6	2	4	3	5	6	6	3	5	4	2	4	5	6	2	3	3	2	5	4	6	5	4	6	3	2	2	3	5	6	4	6	5	4	3	2	4	6	3	2	5	3	2	4	5	6	5	6	2	3	4	2	5	3	6	4	6	4	5	2	3	3	6	3	5	2	5	2	4	3	6	2	4	3	5	6	6	3	5	4	2	4	5	6	2	3	3	2	5	4	6	5	4	6	3	2	2	3	5	6	4	6	5	4	3	2	4	6	3	2	5	3	2	4	5	6	5	6	2	3	4	2	5	3	6	4	6	4	5	2	3	3	6	3	5	2	5	2	4	3	6	2	4	3	5	6	6	3	5	4	2	4	5	6	2	3	3	2	5	4	6	5	4	6	3	2	2	3	5	6	4	6	5	4	3	2	4	6	3	2	5	3	2	4	5	6	5	6	2	3	4	2	5	3	6	4	6	4	5	2	3	3	6	3	5	2	5	2	4	3	6	2	4	3	5	6	6	3	5	4	2	4	5	6	2	3	3	2	5	4	6	5	4	6	3	2	2	3	5	6	4	6	5	4	3	2	4	6	3	2	5	3	2	4	5	6	5	6	2	3	4	2	5	3	6	4	6	4	5	2	3	3	6	3	5	2	5	2	4	3	6	2	4	3	5	6	6	3	5	4	2	4	5	6	2	3	3	2	5	4	6	5	4	6	3	2	2	3	5	6	4	6	5	4	3	2	4	6	3	2	5	3	2	4	5	6	5	6	2	3	4	2	5	3	6	4	6	4	5	2	3	3	6	3	5	2	5	2	4	3	6	2	4	3	5	6	6	3	5	4	2	4	5	6	2	3	3	2	5	4	6	5	4	6	3	2	2	3	5	6	4	6	5	4	3	2	4	6	3	2	5	3	2	4	5	6	5	6	2	3	4	2	5	3	6	4	6	4	5	2	3	3	6	3	5	2	5	2	4	3	6	2	4	3	5	6	6	3	5	4	2	4	5	6	2	3	3	2	5	4	6	5	4	6	3	2	2	3	5	6	4	6	5	4	3	2	4	6	3	2	5	3	2	4	5	6	5	6	2	3	4	2	5	3	6	4	6	4	5	2	3	3	6	3	5	2	5	2	4	3	6	2	4	3	5	6	6	3	5	4	2	4	5	6	2	3	3	2	5	4	6	5	4	6	3	2	2	3	5	6	4	6	5	4	3	2	4	6	3	2	5	3	2	4	5	6	5	6	2	3	4	2	5	3	6	4	6	4	5	2	3	3	6	3	5	2	5	2	4	3	6	2	4	3	5	6	6	3	5	4	2	4	5	6	2	3	3	2	5	4	6	5	4	6	3	2	2	3	5	6	4	6	5	4	3	2	4	6	3	2	5	3	2	4	5	6	5	6	2	3	4	2	5	3	6	4	6	4	5	2	3	3	6	3	5	2	5	2	4	3	6	2	4	3	5	6	6	3	5	4	2	4	5	6	2	3	3	2	5	4	6	5	4	6	3	2	2	3	5	6	4	6	5	4	3	2	4	6	3	2	5	3	2	4	5	6	5	6	2	3	4	2	5	3	6	4	6	4	5	2	3	3	6	3	5	2	5	2	4	3	6	2	4	3	5	6	6	3	5	4	2	4	5	6	2	3	3	2	5	4	6	5	4	6	3	2	2	3	5	6	4	6	5	4	3	2	4	6	3	2	5	3	2	4	5	6	5	6	2	3	4	2	5	3	6	4	6	4	5	2	3	3	6	3	5	2	5	2	4	3	6	2	4	3	5	6	6	3	5	4	2	4	5	6	2	3	3	2	5	4	6	5	4	6	3	2	2	3	5	6	4	6	5	4	3	2	4	6	3	2	5	3	2	4	5	6	5	6	2	3	4	2	5	3	6	4	6	4	5	2	3	3	6	3	5	2	5	2	4	3	6	2	4	3	5	6	6	3	5	4	2	4	5	6	2	3	3	2	5	4	6	5	4	6	3	2	2	3	5	6	4	6	5	4	3	2	4	6	3	2	5	3	2	4	5	6	5	6	2	3	4	2	5	3	6	4	6	4	5	2	3	3	6	3	5	2	5	2	4	3	6	2	4	3	5	6	6	3	5	4	2	4	5	6	2	3	3	2	5	4	6	5	4	6	3	2	2	3	5	6	4	6	5	4	3	2	4	6	3	2	5	3	2	4	5	6	5	6	2	3	4	2	5	3	6	4	6	4	5	2	3	3	6	3	5	2	5	2	4	3	6	2	4	3	5	6	6	3	5	4	2	4	5	6	2	3	3	2	5	4	6	5	4	6	3	2	2	3	5	6	4	6	5	4	3	2	4	6	3	2	5	3	2	4	5	6	5	6	2	3	4	2	5	3	6	4	6	4	5	2	3	3	6	3	5	2	5	2	4	3	6	2	4	3	5	6	6	3	5	4	2
5	3	4	2	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	5	4	2	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	6	5	4	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	3	6	5	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	2	3	5	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	4	2	6	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	6	4	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	5	3	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	4	3	5	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	2	6	3	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	6	5	2	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	2	4	3	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	4	3	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	3	5	4	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	5	6	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	5	4	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	4	6	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	3	5	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	5	4	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	6	3	2	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	4	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	6	2	3	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	5	3	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	4	5	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	6	3	5	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	2	4	3	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	4	3	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	3	5	4	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	5	6	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	5	4	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	4	6	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	3	5	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	5	4	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	6	3	2	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	4	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	6	2	3	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	5	3	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	4	5	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	6	3	5	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	2	4	3	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	4	3	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	3	5	4	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	5	6	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	5	4	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	4	6	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	3	5	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	5	4	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	6	3	2	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	4	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	6	2	3	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	5	3	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	4	5	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	6	3	5	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	2	4	3	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	4	3	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	3	5	4	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	5	6	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	5	4	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	4	6	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	3	5	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	5	4	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	6	3	2	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	4	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	6	2	3	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	5	3	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	4	5	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	6	3	5	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	2	4	3	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	4	3	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	3	5	4	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	5	6	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	5	4	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	4	6	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	3	5	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	5	4	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	6	3	2	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	4	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	6	2	3	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	5	3	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	4	5	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	6	3	5	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	2	4	3	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	4	3	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	3	5	4	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	5	6	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	5	4	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	4	6	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	3	5	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	5	4	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	6	3	2	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	4	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	6	2	3	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	5	3	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	4	5	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	6	3	5	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	2	4	3	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	4	3	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	3	5	4	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	5	6	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	5	4	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	4	6	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	3	5	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	5	4	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	6	3	2	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	4	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	6	2	3	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	5	3	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	4	5	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	6	3	5	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	2	4	3	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	4	3	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	3	5	4	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	5	6	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	5	4	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	4	6	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	3	5	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	5	4	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	6	3	2	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	4	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	6	2	3	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	5	3	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	4	5	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	6	3	5	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	2	4	3	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	4	3	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	3	5	4	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	5	6	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	5	4	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	4	6	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	3	5	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	5	4	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	6	3	2	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	4	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	6	2	3	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	5	3	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	4	5	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	6	3	5	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	2	4	3	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	4	3	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	3	5	4	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	5	6	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	5	4	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	4	6	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	3	5	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	5	4	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	6	3	2	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	4	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	6	2	3	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	5	3	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	4	5	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	6	3	5	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	2	4	3	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	4	3	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	3	5	4	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	5	6	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	5	4	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	4	6	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	3	5	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	5	4	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	6	3	2	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	4	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	6	2	3	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	5	3	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	4	5	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	6	3	5	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	2	4	3	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	4	3	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	3	5	4	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	5	6	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	5	4	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	4	6	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	3	5	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	5	4	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	6	3	2	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	4	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	6	2	3	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	5	3	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	4	5	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	6	3	5	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	2	4	3	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	4	3	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	3	5	4	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	5	6	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	5	4	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	4	6	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	3	5	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	5	4	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	6	3	2	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	4	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	6	2	3	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	5	3	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	4	5	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	6	3	5	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	2	4	3	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	4	3	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	3	5	4	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	5	6	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	5	4	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	4	6	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	3	5	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	5	4	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	6	3	2	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	4	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	6	2	3	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	5	3	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	4	5	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	6	3	5	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	2	4	3	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	4	3	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	3	5	4	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	5	6	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	5	4	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	4	6	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	3	5	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	5	4	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	6	3	2	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	4	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	6	2	3	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	5	3	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	4	5	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	6	3	5	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	2	4	3	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	4	3	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	3	5	4	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	5	6	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	5	4	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	4	6	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	3	5	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	5	4	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	6	3	2	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	4	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	6	2	3	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	5	3	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	4	5	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	6	3	5	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	2	4	3	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	4	3	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	3	5	4	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	5	6	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	5	4	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	4	6	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	3	5	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	5	4	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	6	3	2	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	4	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	6	2	3	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	5	3	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	4	5	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	6	3	5	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	2	4	3	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	4	3	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	3	5	4	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	5	6	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	5	4	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	4	6	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	3	5	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	5	4	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	6	3	2	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	4	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	6	2	3	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	5	3	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	4	5	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	6	3	5	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	2	4	3	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	4	3	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	3	5	4	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	5	6	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	5	4	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	4	6	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	3	5	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	5	4	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	6	3	2	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	4	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	6	2	3	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	5	3	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	4	5	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	6	3	5	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	2	4	3	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	4	3	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	3	5	4	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	5	6	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	5	4	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	4	6	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	3	5	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	5	4	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	6	3	2	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	4	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	6	2	3	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	5	3	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	4	5	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	6	3	5	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	2	4	3	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	4	3	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	3	5	4	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	5	6	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	5	4	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	4	6	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	3	5	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	5	4	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	6	3	2	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	4	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	6	2	3	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	5	3	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	4	5	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	6	3	5	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	2	4	3	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	4	3	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	3	5	4	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	5	6	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	5	4	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	4	6	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	3	5	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	5	4	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	6	3	2	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	4	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	6	2	3	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	5	3	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	4	5	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	6	3	5	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	2	4	3	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	4	3	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	3	5	4	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	5	6	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	5	4	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	4	6	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	3	5	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	5	4	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	6	3	2	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	4	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	6	2	3	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	5	3	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	4	5	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	6	3	5	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	2	4	3	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	4	3	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	3	5	4	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	5	6	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	5	4	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	4	6	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	3	5	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	5	4	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	6	3	2	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	4	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	6	2	3	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	5	3	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	4	5	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	6	3	5	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	2	4	3	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	4	3	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	3	5	4	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	5	6	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	5	4	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	4	6	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	3	5	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	5	4	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
4	6	3	2	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	2	4	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	6	2	3	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	5	3	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	4	5	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
3	6	3	5	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
5	2	4	3	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
2	4	3	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
6	3	5	4	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								

Příjemné prožití vánočních svátků a šťastný nový rok 2025!

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	1
3	4	5	6	7	8	9	1	2
4	5	6	7	8	9	1	2	3
5	6	7	8	9	1	2	3	4
6	7	8	9	1	2	3	4	5
7	8	9	1	2	3	4	5	6
8	9	1	2	3	4	5	6	7
9	1	2	3	4	5	6	7	8

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	1
3	4	5	6	7	8	9	1	2
4	5	6	7	8	9	1	2	3
5	6	7	8	9	1	2	3	4
6	7	8	9	1	2	3	4	5
7	8	9	1	2	3	4	5	6
8	9	1	2	3	4	5	6	7
9	1	2	3	4	5	6	7	8

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	1
3	4	5	6	7	8	9	1	2
4	5	6	7	8	9	1	2	3
5	6	7	8	9	1	2	3	4
6	7	8	9	1	2	3	4	5
7	8	9	1	2	3	4	5	6
8	9	1	2	3	4	5	6	7
9	1	2	3	4	5	6	7	8

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	1
3	4	5	6	7	8	9	1	2
4	5	6	7	8	9	1	2	3
5	6	7	8	9	1	2	3	4
6	7	8	9	1	2	3	4	5
7	8	9	1	2	3	4	5	6
8	9	1	2	3	4	5	6	7
9	1	2	3	4	5	6	7	8

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	1
3	4	5	6	7	8	9	1	2
4	5	6	7	8	9	1	2	3
5	6	7	8	9	1	2	3	4
6	7	8	9	1	2	3	4	5
7	8	9	1	2	3	4	5	6
8	9	1	2	3	4	5	6	7
9	1	2	3	4	5	6	7	8

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	1
3	4	5	6	7	8	9	1	2
4	5	6	7	8	9	1	2	3
5	6	7	8	9	1	2	3	4
6	7	8	9	1	2	3	4	5
7	8	9	1	2	3	4	5	6
8	9	1	2	3	4	5	6	7
9	1	2	3	4	5	6	7	8

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	1
3	4	5	6	7	8	9	1	2
4	5	6	7	8	9	1	2	3
5	6	7	8	9	1	2	3	4
6	7	8	9	1	2	3	4	5
7	8	9	1	2	3	4	5	6
8	9	1	2	3	4	5	6	7
9	1	2	3	4	5	6	7	8

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	1
3	4	5	6	7	8	9	1	2
4	5	6	7	8	9	1	2	3
5	6	7	8	9	1	2	3	4
6	7	8	9	1	2	3	4	5
7	8	9	1	2	3	4	5	6
8	9	1	2	3	4	5	6	7
9	1	2	3	4	5	6	7	8

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	1
3	4	5	6	7	8	9	1	2
4	5	6	7	8	9	1	2	3
5	6	7	8	9	1	2	3	4
6	7	8	9	1	2	3	4	5
7	8	9	1	2	3	4	5	6
8	9	1	2	3	4	5	6	7
9	1	2	3	4	5	6	7	8

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	1
3	4	5	6	7	8	9	1	2
4	5	6	7	8	9	1	2	3
5	6	7	8	9	1	2	3	4
6	7	8	9	1	2	3	4	5
7	8	9	1	2	3	4	5	6
8	9	1	2	3	4	5	6	7
9	1	2	3	4	5	6	7	8

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	1
3	4	5	6	7	8	9	1	2
4	5	6	7	8	9	1	2	3
5	6	7	8	9	1	2	3	4
6	7	8	9	1	2	3	4	5
7	8	9	1	2	3	4	5	6
8	9	1	2	3	4	5	6	7
9	1	2	3	4	5	6	7	8

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	1
3	4	5	6	7	8	9	1	2
4	5	6	7	8	9	1	2	3
5	6	7	8	9	1	2	3	4
6	7	8	9	1	2	3	4	5
7	8	9	1	2	3	4	5	6
8	9	1	2	3	4	5	6	7
9	1	2	3	4	5	6	7	8

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	1
3	4	5	6	7	8	9	1	2
4	5	6	7	8	9	1	2	3
5	6	7	8	9	1	2	3	4
6	7	8	9	1	2	3	4	5
7	8	9	1	2	3	4	5	6
8	9	1	2	3	4	5	6	7
9	1	2	3	4	5	6	7	8

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	1
3	4	5	6	7	8	9	1	2
4	5	6	7	8	9	1	2	3
5	6	7	8	9	1	2	3	4
6	7	8	9	1	2	3	4	5
7	8	9	1	2	3	4	5	6
8	9	1	2	3	4	5	6	7
9	1	2	3	4	5	6	7	8

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	1
3	4	5	6	7	8	9	1	2
4	5	6	7	8	9	1	2	3
5	6	7	8	9	1	2	3	4
6	7	8	9	1	2	3	4	5
7	8	9	1	2	3	4	5	6
8	9	1	2	3	4	5	6	7
9	1	2	3	4	5	6	7	8

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	1
3	4	5	6	7	8	9	1	2
4	5	6	7	8	9	1	2	3
5	6	7	8	9	1	2	3	4
6	7	8	9	1	2	3	4	5
7	8	9	1	2	3	4	5	6
8	9	1	2	3	4	5	6	7
9	1	2	3	4	5	6	7	8

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	1
3	4	5	6	7	8	9	1	2
4	5	6	7	8	9	1	2	3
5	6	7	8	9	1	2	3	4
6	7	8	9	1	2	3	4	5
7	8	9	1	2	3	4	5	6
8	9	1	2	3	4	5	6	7
9	1	2	3	4	5	6	7	8

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	1
3	4	5	6	7	8	9	1	2
4	5	6	7	8	9	1	2	3
5	6	7	8	9	1	2	3	4
6	7	8	9	1	2	3	4	5
7	8	9	1	2	3	4	5	6
8	9	1	2	3	4	5	6	7
9	1	2	3	4	5	6	7	8

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	1
3	4	5	6	7	8	9	1	2
4	5	6	7	8	9	1	2	3
5	6	7	8	9	1	2	3	4
6	7	8	9	1	2	3	4	5
7	8	9	1	2	3	4	5	6
8	9	1	2	3	4	5	6	7
9	1	2	3	4	5	6	7	8

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	1
3	4	5	6	7	8	9	1	2
4	5	6	7	8	9	1	2	3
5	6	7	8	9	1	2	3	4
6	7	8	9	1	2	3	4	5
7	8	9	1	2	3	4	5	6
8	9	1	2	3	4	5	6	7
9	1	2	3	4	5	6	7	8

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	1
3	4	5	6	7	8	9	1	2
4	5	6	7	8	9	1	2	3
5	6	7	8	9	1	2	3	4
6	7	8	9	1	2	3	4	5
7	8	9	1	2	3	4	5	6
8	9	1	2	3	4	5	6	7
9	1	2	3	4	5	6	7	8

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	1
3	4	5	6	7	8	9	1	2
4	5	6	7	8	9	1	2	3
5	6	7	8	9	1	2	3	4
6	7	8	9	1	2	3	4	5
7	8	9	1	2	3	4	5	6
8	9	1	2	3	4	5	6	7
9	1	2	3	4	5	6	7	8

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	1
3	4	5	6	7	8	9	1	2
4	5	6	7	8	9	1	2	3
5	6	7	8	9	1	2	3	4
6	7	8	9	1	2	3	4	5
7	8	9	1	2	3	4	5	6
8	9	1	2	3	4	5	6	7
9	1	2	3	4	5	6	7	8

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	1
3	4	5	6	7	8	9	1	2
4	5	6	7	8	9	1	2	3
5	6	7	8	9	1	2	3	

ZOBECNĚNÁ ENTROPIE (RÉNYIHO α -ENTROPIE
A DALŠÍ)

ENTROPY (RÉNYI'S AND OTHERS)

Zdeněk Pulpán

Adresa: Univerzita Pardubice, Dopravní fakulta Jana Pernera, Studentská 95,
532 10 Pardubice 2; Na Brně 1952, 500 09 Hradec Králové 9

E-mail: zdenek.pulpan@upce.cz, zdenek.pulpan@post.cz

Abstrakt: Entropie je jedna z charakteristik náhodné veličiny. V práci jsou ukázána některá zobecnění původní Shannonovy entropie jako je Rényiho nebo Tsallisova entropie. Naznačeny jsou další možnosti zobecnění.

Klíčová slova: entropie, Shannonova entropie, Rényiho entropie, Tsallisova entropie, lineární entropie.

Abstract: Entropy is one of the characteristics of a random variable. Some generalized original Shannon entropies such as Rényi's or Tsalli's entropy are shown in the work. Other possibilities of generalization are indicated too.

Keywords: entropy, Shannon entropy, Rényi entropy, Tsallis entropy, linear entropy.

1. Úvod

Když v roce 1928 definoval Hartley svůj vzorec pro určení kvantity neurčitosti v popisu přenosu zpráv, možná netušil, jak významná byla jeho myšlenka použití logaritmu na počet všech očekávaných možných situací. Shannonovou zásluhou o 20 let později pak bylo zavedení míry neurčitosti (později nazvané entropie) a velikosti informace (informace jako rozdíl entropie před a po přijetí zprávy) rozšířením Hartleyovy myšlenky na rozdělení pravděpodobnosti navzájem se vylučujících očekávaných variant zprávy. Studium neurčitosti při přenosu zpráv vedlo k objevu řady pozoruhodných vztahů mezi naším chápáním neurčitosti a jejím zachycením pomocí pravděpodobnosti a pak entropie. Tak se vytvořila nová charakteristika, odvozená z pravděpodobnostního rozdělení (na množině všech variant zprávy) a pojem entropie se stal součástí teorie pravděpodobnosti.

Známý maďarský matematik Alfréd Rényi (1921–1970) stačil za svůj krátký život Shannonovu myšlenku dále tak zobecnit, že předchozí možnosti odhadu neurčitosti z entropie se staly za určitých podmínek pouze speciálními případy Rényiho zobecnění Shannonovy entropie. Rényiho parametrizované

zobecnění má (vhodnou volbou hodnoty parametru) větší naději pro uplatnění v různých experimentálních situacích (tedy již ne jenom při přenosu a kódování informace) než poněkud užší pojetí Shannonovo. Základním krokem aplikace v konkrétní experimentální situaci je volba určité náhodné veličiny (mající vztah k experimentu) a její pro interpretaci nejvhodnější míry neurčitosti. Měr neurčitosti se ve dvacátém století objevilo velké množství, my se zde zmíníme o těch z našeho hlediska nejzajímavějších [1, 2, 4–8, 12–15].

2. Rényiho zobecněná entropie

Uvažujme pravděpodobnostní schéma s diskrétní náhodnou veličinou X a její pravděpodobnostní funkci

$$P_n = \begin{pmatrix} x_1, \dots, x_n \\ p_1, \dots, p_n \end{pmatrix}, \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1, \quad 0 \leq p_i \leq 1,$$

v pravděpodobnostním prostoru $\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n$, kde $\Omega_n = \{x_1, x_2, \dots, x_{n_i}\}$, $n \geq 2$, je základní prostor, $\mathcal{A}_n$ algebra všech jeho podmnožin a P_n pravděpodobnost na $\mathcal{A}_n$.

Definice 1. Zobecněnou Rényiho entropii řádu α , kde $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, pro diskrétní náhodnou veličinu X s pravděpodobnostní funkcí $P_n(X = x_i) = p_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, nazýváme výraz

$$H_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \log_z \left(\sum_{i=1}^n p_i^\alpha \right), \text{ o základu logaritmu } z \geq 2, \quad (1)$$

kteřý je nejčastěji volený $z = 2$, resp. $z = 10$, resp. $z = e$. Podle toho se odlišují jednotky, jak ukažeme.

Dále budeme diskretní náhodnou veličinu X (dále jen n. v. X) označovat také pomocí jejího pravděpodobnostního rozdělení takto:

$$X = (p_1, p_2, \dots, p_n).$$

Pro každé přípustné α představuje $H_\alpha(X)$ určitý „metr“ měření entropie (pro odhad míry neurčitosti) diskrétní n. v. X . Entropie souvisí s informací n. v. X tak, že informace je rozdíl veličiny $H_\alpha(X)$ s rozdělením před sledovanou událostí a po ní. Základ logaritmu je v počtátě libovolný (určuje ale také „metr“, souvisí tedy s interpretací veličiny $H_\alpha(X)$), často se užívá dvojkový logaritmus ($z = 2$) protože má nejjednodušší interpretaci. Jednotku entropie při $z = 2$ bychom měli označovat α -bit.

POZVÁNKA NA KONFERENCI OSSCONF 2025
INVITATION TO THE OSSCONF 2025 CONFERENCE

Miroslav Kvařšay

E-mail: miroslav.kvassay@fri.uniza.sk

Otvorený softvér vo vzdelávaní, výskume a v IT riešeníach



Fakulta riadená a informatiky Žilinskej Univerzity v spolupráci so Spoločnosťou pre otvorené informačné technológie (SOIT) a združeniami CSTUG, Česká statistická společnost, Geokomunita

organizujú tento rok už 13. ročník konferencie



OSConf 2025



Konferencia sa uskutoční v priestoroch Fakulty riadenia a informatiky v Žiline v termíne

1. júlá – 3. júlá 2025

Celom našej konferencie je poskytnúť priestor pre informovanie o novinkách vo vývoji otvoreného softvéru a otvorených technológií, o možnostiach využitia týchto nástrojov vo vede a vzdelávaní a taktiež poskytnúť priestor pre neformálne dialogické stretnutie užívateľov a priaznivcov otvorených informačných technológií. Pri príležitosti konferencie bude vydaný zborník príspevkov. Príspevky autorov príjímame buď ako ne recenzované príspevky, z ktorých uverejňujeme len abstrakt alebo recenzované príspevky, ktoré budú podrobované našim nezávislým recenzantom. Predpísaná šablóna pre písanie príspevkov v typografickom systéme $\text{\LaTeX}/\text{\LaTeX}$ bude k dispozícii na webovej stránke konferencie. Príspevky prijímame v slovenskom, českom alebo anglickom jazyku.

českom alebo anglickom jazyku.

Dôležité termíny

Recenzované príspevky:

Abstrakty nerecenzovaných vystúpení: do 15. júna 2025

Sekcie

Open AI

L^AT_EX, R a i ch priate lia

OSS vo vzdelávaní

Open GIS & Open Data

Vývoj OSS

Náš konferenciu sa snažíme, tak ako po iné roky, udržať bez platenia vložného. Pre záujemcov môžeme za úhradu zabezpečiť obedy v stravovacom zariadení Zlínskej univerzity (aktuálnu cenu uverejníme na web stránke). Účastníci, ktorí majú záujem o ubytovanie si toto ubytujú individuálne podľa pokynov zverejnených na web stránke konferencie. Predpokladaná cena zľomka bude 8 – 10 €.

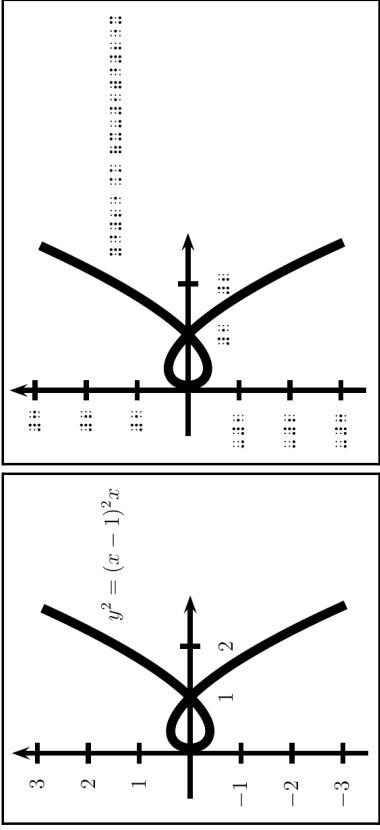
Blížšie informácie o konferencii budeme postupne zverejňovať na <http://ossconf.soit.sk/>.

balíčky `spelateX` (Speech-enabled $\text{\LaTeX}$) a `colorblind`, více viz výzkum Paula Tola, <https://personal.sron.nl/~pault/>.

Na balíček `unicode-math` navazuje balíček `unicode-math-braille`. Zde je vzhled z dokumentace, v prvním sloupci je $\text{\TeX}$ ový příkaz, v druhém vysazený symbol, v třetím reprezentace v Braillově písmu a anglický ekvivalent.

<code>\coprod</code>	$\coprod$	⠠⠏⠗⠔⠗⠗	coproduct operator
<code>\sum</code>	$\sum$	⠠⠑⠗⠗	summation operator
<code>\int</code>	$\int$	⠠⠇	integral operator
<code>\iint</code>	$\iint$	⠠⠇⠠⠇	double integral operator
<code>\iiint</code>	$\iiint$	⠠⠇⠠⠇⠠⠇	triple integral operator

Na závěr bych rád upozornil na TUGem podpořený projekt č. 33, který vyústil v balíček `latex2nemeth`. Objevil jsem jejich program pro Javu v adresáři `~/texlive/2024/texmf-dist/scripts/latex2nemeth/`, resp. v adresáři `~/texlive/2024/bin/x86_64-linux/`, a po jistém experimentování se mi konverze písma podařila.



Je možné, že by se konverze dala udělat přímo v `\Lua\TeX`u, ale nezkoušel jsem to.

Poznámka:

Místo $H(X) = H(p_1, p_2, \dots, p_n)$ píšeme dále jen $H(p_1, p_2, \dots, p_n)$.
Speciální případy:

1) Je-li $P_n(X = x_i) = \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, \dots, n$, pak

$$H_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \log_z(n \cdot (n^{-\alpha})) = \log_z n = H_0(X)$$

nezávisle na volbě α . Výsledná Rényiho entropie je zde Hartleyovou mírou. Volíme-li ve výrazu pro $H_\alpha(X)$ parametr $\alpha = 0$, dostaneme tutéž hodnotu $\log_z n$. Proto označujeme v tomto případě Rényiho entropii $H_0(X)$.

2) V definici Rényiho zobecněné entropie je vyloučena hodnota $\alpha = 1$. Limitním přechodem pro $\alpha \rightarrow 1$ však dostaneme Shannonovu entropii:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 1} H_\alpha(X) &= \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\log_2 \sum_1^n p_i^\alpha}{1-\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{1}{1-\alpha} \ln \frac{\sum_1^n p_i^\alpha}{1-\alpha} = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{-1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{\sum_1^n p_i^\alpha} \cdot \sum_1^n p_i^\alpha \ln p_i = - \sum_1^n p_i \log_2 p_i. \end{aligned}$$

Definujeme zde $0 \cdot \log 0$ limitou $\lim_{p \rightarrow 0^+} p \cdot \log p$. Hodnotu $H_\alpha(X)$ lze tedy dodefinovat i pro $\alpha = 1$ Shannonovou entropií. Proto v tomto případě se značí

$$H_1(X) = - \sum_1^n p_i \log_2 p_i \quad [\text{bit}].$$

Pro základ logaritmu 10, resp. e se jednotka nazývá *dit*, resp. *nit*.

3) Volíme-li $\alpha = 2$, dostaneme tzv. kolizní entropii ve tvaru

$$H_2(X) = - \log_2 \sum_1^n p_i^2 \quad [2\text{-bit}].$$

4) Přechodem k limitě $\alpha \rightarrow \infty$, dostaneme Rényiho entropii postupně ve tvaru

$$\begin{aligned} H_\infty(X) &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} H_\alpha(X) = \min_i (-\log_2 p_i) = \\ &= -\max_i \log_2 p_i = \log_2 \max_i p_i \quad [\infty\text{-bit}]. \end{aligned}$$

Z důvodů, které dále ukážeme, se tato entropie nazývá minimální.

Ještě se někdy uvazuje o limitě $\alpha \rightarrow -\infty$ (vzhledem k limitě předchozí) a pak se definuje

$$H_{-\infty}(X) = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} H_\alpha(X) = -\log_2 \min_i p_i \quad [-\infty\text{-bit}].$$

Tato entropie se nazývá maximální.

Nyní se podíváme na závislost hodnot entropie $H_\alpha(X)$ na α . Platí následující věta.

Věta 1. Rényiho entropie $H_\alpha(X)$ je nerostoucí funkcí v proměnné α , $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$.

Důkaz: Spočteme derivaci $H_\alpha(X)$ podle α :

$$\begin{aligned} \frac{dH_\alpha(X)}{d\alpha} &= \frac{1}{(1-\alpha)^2} \cdot \log_2 \sum_1^n p_i^\alpha + \frac{1}{1-\alpha} \sum_1^n \frac{p_i^\alpha}{\sum_j p_j^\alpha} \log_2 p_i = \\ &= \frac{1}{(1-\alpha)^2} \left\{ \log_2 \sum_1^n p_i^\alpha + \sum_1^n p_i^\alpha \frac{1}{\sum_j p_j^\alpha} \log_2 p_i - \right. \\ &\quad \left. - \sum_1^n p_i^\alpha \frac{1}{\sum_j p_j^\alpha} \log_2 p_i^\alpha \right\} = \frac{1}{(1-\alpha)^2} \left\{ 1 \cdot \log_2 \sum_1^n p_i^\alpha + \right. \\ &\quad \left. + \sum_1^n \frac{p_i^\alpha}{\sum_j p_j^\alpha} \cdot \log_2 \frac{p_i}{p_i^\alpha} \right\}. \end{aligned}$$

Nyní použijeme vztah

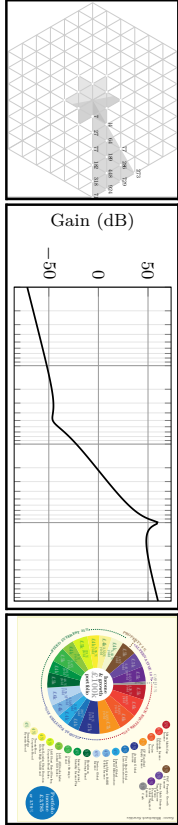
$$1 = \sum_1^n p_i^\alpha \frac{1}{\sum_1^n p_j^\alpha} = \sum_1^n p_i^\alpha \frac{1}{\sum_{j=1}^n p_j^\alpha}.$$

A dosadíme do posledního výrazu pro derivaci a dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{dH_\alpha(X)}{d\alpha} &= \frac{1}{(1-\alpha)^2} \left\{ \sum_i \frac{p_i^\alpha}{\sum_j p_j^\alpha} \log_2 \sum_i p_i^\alpha + \sum_i \frac{p_i^\alpha}{\sum_j p_j^\alpha} \log_2 \frac{p_i}{p_i^\alpha} \right\} = \\ &= \frac{1}{(1-\alpha)^2} \left\{ \sum_i \frac{p_i^\alpha}{\sum_j p_j^\alpha} \log_2 p_i^\alpha \sum_i \frac{p_i}{p_i^\alpha} \right\} = \\ &= -\frac{1}{(1-\alpha)^2} \sum_i \frac{p_i^\alpha}{\sum_j p_j^\alpha} \cdot \log_2 \frac{p_i^\alpha}{p_i \sum_j p_j^\alpha} = \frac{-1}{(1-\alpha)^2} \sum_i z_i \log_2 \frac{z_i}{p_i}, \end{aligned}$$

kde jsme položili $z_i = \frac{p_i^\alpha}{\sum_j p_j^\alpha}$. Derivace $\frac{dH_\alpha(X)}{d\alpha}$ je záporná, protože představuje $\frac{-1}{(1-\alpha)^2}$ násobek Kullback-Leiblerovy divergence, která je vždy nezáporná [4].

Poznámka: Po dodefinování H_1 i pro $\alpha = 1$, je $H_\alpha(X)$ nerostoucí spojitou funkcí α .



Typografie

V této oblasti jsem si poznal balíčky lua-ul (varianta k balíčkovému soulu a ulem), circularglyphs, fvector (nastavba balíčku fancyrb) a witharrows, viz ukázky.

$\begin{aligned} 2xy' - 3y &= \sqrt{x} \Leftrightarrow 2x(K'y_0 + K'y_0') - 3Ky_0 = \sqrt{x} \\ &\Leftrightarrow 2xK'y_0 + K'(2xy_0' - 3y_0) = \sqrt{x} \\ &\Leftrightarrow 2xK'y_0 = \sqrt{x} \\ &\Leftrightarrow 2xK'x^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{1}{2}} \quad \text{we replace } y_0 \text{ by its value} \\ &\Leftrightarrow K' = \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} \quad \text{simplification of the } x \\ &\Leftrightarrow K = -\frac{1}{2x} \quad \text{antiderivation} \end{aligned}$	$\begin{aligned} A &= B \\ &= C \quad \leftarrow \\ &= D \quad \leftarrow \\ &= E \quad \leftarrow \\ &= F \quad \leftarrow \end{aligned} \quad \text{text}$	$\begin{aligned} 3(2x+4) &= 6 \\ 2x+4 &= 2 \\ 2x &= -2 \\ 2x &= -1 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{aligned}$
---	--	--

Znaky, glyfy a písma

Pro pobavení stojí balíčky tikzlings a rpgicons. Mnohem důležitější je rodina písem New Computer Modern, viz balíčky newcm a fontsetup, srovnání lze provést za pomoci balíčku unicodefonttable (rozšíření pomůcky testfont).

Nezarmoutilo ani písmo Inconsolata Nerd (horní ukázka, balíček inconsolata-nerd-font), balíček simpleicons (spodní ukázka) a podpora pro písmo Junice code (balíček stejného jména), vhodný především pro humanitní obory.

U+E670–E67F	𐀀 𐀁 𐀂 𐀃 𐀄 𐀅 𐀆 𐀇 𐀈 𐀉 𐀊 𐀋 𐀌 𐀍 𐀎 𐀏 𐀐 𐀑 𐀒 𐀓 𐀔 𐀕 𐀖 𐀗 𐀘 𐀙 𐀚 𐀛 𐀜 𐀝 𐀞 𐀟 𐀠 𐀡 𐀢 𐀣 𐀤 𐀥 𐀦 𐀧 𐀨 𐀩 𐀪 𐀫 𐀬 𐀭 𐀮 𐀯 𐀰 𐀱 𐀲 𐀳 𐀴 𐀵 𐀶 𐀷 𐀸 𐀹 𐀺 𐀻 𐀼 𐀽 𐀾 𐀿	\simpleicon{wolfram}
U+E680–E68F	𐀰 𐀱 𐀲 𐀳 𐀴 𐀵 𐀶 𐀷 𐀸 𐀹 𐀺 𐀻 𐀼 𐀽 𐀾 𐀿 𐀰 𐀱 𐀲 𐀳 𐀴 𐀵 𐀶 𐀷 𐀸 𐀹 𐀺 𐀻 𐀼 𐀽 𐀾 𐀿 𐀰 𐀱 𐀲 𐀳 𐀴 𐀵 𐀶 𐀷 𐀸 𐀹 𐀺 𐀻 𐀼 𐀽 𐀾 𐀿	\simpleicon{wolframlanguage}
U+E690–E69F	𐀰 𐀱 𐀲 𐀳 𐀴 𐀵 𐀶 𐀷 𐀸 𐀹 𐀺 𐀻 𐀼 𐀽 𐀾 𐀿 𐀰 𐀱 𐀲 𐀳 𐀴 𐀵 𐀶 𐀷 𐀸 𐀹 𐀺 𐀻 𐀼 𐀽 𐀾 𐀿 𐀰 𐀱 𐀲 𐀳 𐀴 𐀵 𐀶 𐀷 𐀸 𐀹 𐀺 𐀻 𐀼 𐀽 𐀾 𐀿	\simpleicon{wolframmathematica}

Podpora pro zrakové postižené

Poslední, ale nikoliv nevyznanou oblastí, je TeXová podpora v této oblasti. Ze starších projektů je známý balíček braille, z nových bych rád upozornil na

NOVINKY V T_EX_LIV_E 2024

NEWS FROM T_EX_LIV_E 2024

Pavel Stríž

E-mail: pavel@striz.cz

Aktualizací a nových balíčků je tradičně hodně, opět jsem se pokusil vybrat klíčové záležitosti.

Spolupráce s nástroji

Příjemným překvapením roku 2024 jsou balíčky podporující komunikaci s jinými výpočetními nástroji či hlubší propojení s jazykem Lua. Jedná se o balíčky `numeric`, `numeric-plus`, `numeric-tables`; `zx-calculus`, `resolvsysteme`, `lt3lua-bridge` (Vít Novotný); `functional` a `latex2pydata`.

Průběžné ukládání

Aby se výpočty a kresby neopakovaly při každém běhu T_EXu, vznikají balíčky řešící tuto situaci. Jedná se především o balíčky `scontents`, `robust-externalize`, `hvxterm` a `memoize`.

Užitečné nástroje

Nástroj Xindex je zde již nějakou dobu, s pomocí balíčku `Lua-UCA` (Michal Hoftich) zvládá podporu mnoha jazyků. Mít jazyk navázaný přes definice firmy Unicode byl dlouho dobu otevřený problém. První vážný pokus o optimalizaci sazby přes strany je shrnut v balíčku `lua-widow-control` (Max Cher-noff). Více o otevřených T_EXových problémech viz <https://tug.org/tc/devfund/criteria.html>. Zvláštní skupinu tvoří nástroje vyvíjené Petrem Olšákem, viz `OPTex`, `OPmac` a `OPbible`. Od našince stojí dále za pozornost nový balíček Michala Hofricha `responsive` a `markdown` od Víta Novotného.

Grafy a grafika

Zaujal mě balíčky `rank-2-roots`, `bodeplot`, `wheelchart` (obrázky níž), `mcf2graph`, `mptrees`, `tikz-bricks` a `liftarms`.

Důsledek: Pro jednotlivé entropie $H_0(X)$, $H_1(X)$, $H_2(X)$, $H_\infty(X)$ platí nerovnosti

$$H_0(X) \geq H_1(X) \geq H_2(X) \geq H_\infty(X).$$

Poznámka: Uvedené nerovnosti vyplývají také z následujících nerovností:

$$H_1(X) \geq H_2(X) \text{ protože platí } \sum_i p_i \log_2 p_i \leq \log_2 \sum_i p_i^2,$$

$$H_\infty(X) \leq H_2(X) \text{ protože platí } \log_2 \sum_i p_i^2 \leq \log_2 \sup_i p_i.$$

Věta 2. Pro entropie $H_2(X)$ a $H_\infty(X)$ platí nerovnost

$$H_2(X) \leq 2 \cdot H_\infty(X).$$

Důkaz: Podle definice je $H_2(X) = \frac{1}{1-2} \log_2 \sum_i p_i^2 = -\log_2 \sum_i p_i^2$. Protože $\log_2 \sum_i p_i^2 \geq \log_2 \max_i p_i^2 = 2 \log_2 \max_i p_i$, je $H_2(X) \leq -2 \log_2 \max_i p_i = 2 \cdot H_\infty(X)$.

Příklad 1a. Mějme n. v. X s rozdělením $P_2(X = x_1) = p$, $P_2(X = x_2) = 1 - p = q$, $0 \leq p, q \leq 1$. Pak je

$$H_0(X) = \log_2 2 = 1$$

$$H_1(X) = -p \log_2 p - (1 - p) \log_2 (1 - p)$$

$$H_2(X) = -\log_2 (p^2 + q^2)$$

$$H_\infty(X) = -\log_2 \max(p, q).$$

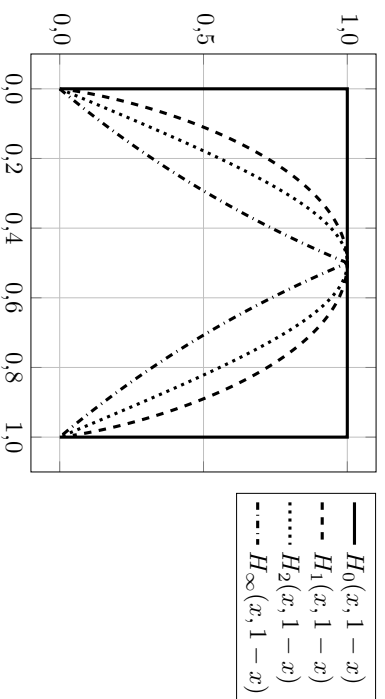
Na Obr. 1 jsou zakresleny grafy funkcí $H_0(X)$, $H_1(X)$, $H_2(X)$ a $H_\infty(X)$, kde $X = (p, 1 - p)$, $0 \leq p \leq 1$.

O dalších vlastnostech entropie $H_\alpha(X)$ se lze dozvědět z [9] nebo také z [18].

Sledujeme-li Obr. 1, na první pohled se zdá, že by mohlo existovat pro n. v. $X = (p, 1 - p)$ reálné $\alpha_0 > 2$ tak, že

$$H_{\alpha_0}(X) = 2 \cdot \min(p, 1 - p)$$

by byla po částech lineární. Platí ale následující Věta 3.



Obrázek 1: Grafy hodnot $H_i(p, 1-p)$ pro $i = 0, 1, 2, \infty$ v závislosti na $p \in (0; 1)$.

Věta 3. Pro žádné reálné $\alpha > 2$ nemůže být

$$H_\alpha(p, 1-p) = \frac{1}{1-\alpha} \log_2(p^\alpha) + (1-p)^\alpha = 2 \cdot \min(p, 1-p), \quad 0 \leq p \leq 1.$$

Důkaz: Předpokládejme, že takové α existuje pro všechna $p \in (0, 1)$. Pak musí pro tato p platit

$$\frac{1}{1-\alpha} \log_2(p^\alpha + (1-p)^\alpha) = 2 \cdot \min(p, 1-p) = 2p,$$

protože vztah je symetrický k p a $1-p$.

Ekvivalenčními úpravami tohoto výrazu dostaneme mezi p a α vztah

$$2^{2p(1-\alpha)} = p^\alpha + (1-p)^\alpha,$$

který má být platný pro jediné α a všech možných volbách $p \in (0; 0.5)$. Pro $p = 0.5$; 1 vztah zřejmě platí pro jakékoli α . Volně proto nejprve $p = 0.25$ a pak $p = 0.125$ a dosadíme do předešlé rovnice.

Pro $p = 0.25$ dostaneme podmínku pro α ve tvaru

$$2^{1.5\alpha+0.5} = 1 + 3^\alpha$$

a pro $p = 0.125$ pak

$$2^{2.75\alpha+0.25} = 1 + 7^\alpha.$$



3. den: Poslední přednášky a návrat domů

Poslední den jsme si poslechli přednášky z aplikací statistiky a zejména zpracování dat a poté o zajímavých hrách. Iveta Stankovičová a Iveta Syneková nám představily Integrovaný statistický informační systém, který využívá Statistický úřad Slovenské republiky.

Po nich nám Viliam Páleník ukázal, jak disponibilní důchody domácností využít jako alternativní indikátor reálné konvergence. Po poslední přestávce nám Josef Košťálek popsal vyvinutý projekt v programu Microsoft Excel pro výuku statistiky, nepochybně zajímavou byla přednáška Eriky Liptákové o postoji studentů ekonomické fakulty k výuce statistiky a na závěr nám Pavel Stríž představil některé varianty sudoku.



Závěr

Na závěr bychom chtěli poděkovat všem organizátorům, společnosti SC&C Partner a také účastníkům, zejména těm, kteří si připravili přednášku do vědecké části programu. Prožili jsme krásné tři dny plné zážitků a statistiky a těšíme se na příští ročník.

Podle předpokladu oba vztahy pro určení α musí mít stejné řešení pro $\alpha > 2$. Ukážeme, že nemohou mít stejná řešení.

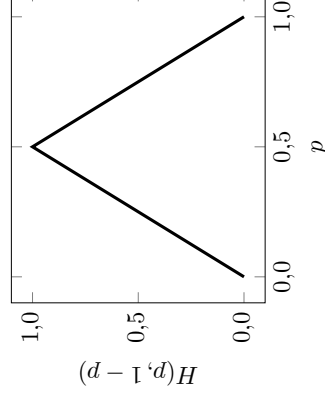
Snadno zjistíme numerickými prostředky, že první rovnice má jediný kořen pro $\alpha > 2$ v intervalu (5; 6) a druhá v intervalu (3; 4). Společný kořen $\alpha > 2$ tedy neexistuje. Proto také pro žádné reálné $\alpha > 2$ nemůže nastat rovnost z Věty 3.

3. Další entropie

Připomeňme na začátek ještě jedno velmi obecné zavedení entropie tzv. Fadějevými axiomy z roku 1956. Fadějev [17] určuje entropii $H(p_1, p_2, \dots, p_n)$, $\sum_i p_i = 1$, $0 \leq p_i \leq 1$ pro všechna i až na multiplikativní konstantu jednoznačně následujícími podmínkami:

1. $H(p, 1-p)$ je spojitá funkce pro $p \in (0; 1)$ a kladná v aspoň jednom bodě;
2. $H(p_1, p_2, \dots, p_n)$ je symetrická funkce svých proměnných;
3. $H(p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, q_1, q_2) = H(p_1, p_2, \dots, p_n) + p_n \cdot H\left(\frac{q_1}{p_n}, \frac{q_2}{p_n}\right)$, kde je $p_n = q_1 + q_2 > 0$. [12]

Nyní se vrátíme k Obr. 1 a uvědomíme si, že žádná Rényiho entropie $H_\alpha(X)$ nemůže být pro dichotomický rozhodovací proces po částech lineární ve tvaru, viz také Obr. 2.



Obrázek 2: Graf funkce $H(p, 1-p) = 2 \cdot \min(p, 1-p)$, $0 \leq p \leq 1$.

Pokusme se ale předchozí vztah rozšířit pomocí Fadějevových axiomů na novou entropii pro n. v. X .

Začneme podmínkou 3. Podle ní musí platit pro $n = 3$

$$\begin{aligned} H(p_1, p_2, p_3) &= H(p_1, p_2 + p_3) + (p_2 + p_3) \cdot H\left(\frac{p_2}{p_2 + p_3}, \frac{p_3}{p_2 + p_3}\right) = \\ &= 2 \cdot \min(p_1, p_2 + p_3) + (p_2 + p_3) \cdot 2 \cdot \min\left(\frac{p_2}{p_2 + p_3}, \frac{p_3}{p_2 + p_3}\right) = \\ &= 2 \cdot \min(p_1, p_2 + p_3) + 2 \cdot \min(p_2, p_3). \end{aligned}$$

A podobně pak bude

$$\begin{aligned} H(p_1, p_2, p_3, p_4) &= H(p_1, p_2, p_3 + p_4) + (p_3 + p_4) H\left(\frac{p_3}{p_3 + p_4}, \frac{p_4}{p_3 + p_4}\right) = \\ &= 2 \cdot \min(p_1, p_2 + p_3 + p_4) + 2 \cdot \min(p_2, p_3 + p_4) + \\ &+ 2 \cdot \min(p_3, p_4), \text{ atd.} \end{aligned}$$

Uvedený postup odpovídá rozhodování podle schématu na Obr. 3.

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 & \{x_2, x_3\} \\ p_1 & 1 - p_1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_2 & \{x_3\} \\ \frac{p_2}{p_2 + p_3} & \frac{p_3}{p_2 + p_3} \end{pmatrix}$$

Obrázek 3: Schéma rozhodování ve dvou krocích, týkající se n. v. $X = (p_1, p_2, p_3)$.

Takto definovaná funkce $H(p_1, p_2, p_3)$ ale není symetrickou funkcí svých pravděpodobností:

$$\begin{aligned} H(0,5;0,25;0,25) &= 2 \cdot \min(0,5;0,5) + 2 \cdot \min(0,25;0,25) = 1 + 0,5 = 1,5; \\ H(0,25;0,5;0,25) &= 2 \cdot \min(0,25;0,75) + 2 \cdot \min(0,5;0,25) = 0,5 + 0,5 = 1. \end{aligned}$$

Poznámka. Někdy je důležité respektovat uspořádání pravděpodobností $p_1, p_2, \dots, p_n$ například s hlediska logiky příslušného rozhodovacího procesu. V některých aplikacích by mohlo záležet na tom, v jaké posloupnosti se jednotlivé varianty v rozhodovacím procesu identifikují nebo která z variant je pro interpretaci variantou preferovanou. [10, 11]

Ukážeme, že lze předejít vztah pro $H(p_1, p_2, p_3)$ upravit tak, aby jeho hodnota nezávisela na permutaci pravděpodobností (p_1, p_2, p_3) : $H(p_1, p_2, p_3) = H(p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3})$, kde $(p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3})$ je taková permutace pravděpodobností, že

$$p_{i_1} \geq p_{i_2} \geq p_{i_3}.$$

2. den: výlet do přírody a soutěživý večer

Po snídani jsme se vrhli do vědecké činnosti, konkrétně do maratonu přednášek. Je potřeba zmínit, že velice zajímavých, pokývavajících jak teoretickou matematickou statistiku, tak i užitečné aplikace. Petr Volf nám prezentoval problem optimálního hledání ztracené osoby formulovaný pomocí teorie pravděpodobnosti a po něm Matej Benko pohovořil o stochastických diferenciálních rovnicích, jejich souvislostech a aplikacích v jiných oblastech jako parciální diferenciální rovnice nebo strojové učení.

Poté nás Michal Fusek a Jan Holešovský seznámili s problematikou odhadu míry lokální závislosti extrémních hodnot v časových řadách. Na závěr nás obohatil pan profesor Jaromír Antoch z Univerzity Karlovy svými zkušenostmi s výběrovými šetřeními a kontrolami pro odhalení řídké se vyskytujících závad.

Po obědě se většina z nás vydala na turistický výlet do Pavlova a zbytek fandil českým hokejistům v boji se Švédskem v semifinále MS v hokeji. Fandové hokeje měli štěstí, jelikož se vyhnuli vydanému osvětlení v podobě bouře a bláta. Ale za to přišli o krásné výhledy (síce částečně pod mrakem) a přírodu Jižní Moravy. Obdiv patři neodvážnějším, kteří došli celý plánovaný okruh zpět do Perné.

Po večeri jsme se vrhli do soutěžení. Libor Žák z FSI VUT nám připravil již tradiční souboj ve znalostech chutí vína. Tentokrát byl test našich chutíových buněk komplexní. Byli jsme testováni z rozpoznání vín Muškát moravský, Palava, Rutandské šedé, Chardonnay a Tramín červený. Nestálo jen rozpoznat víno, ale také jejich cukry, kyselinky, alkoholu a rok. Po Matejovi Benkovi z VUT pomyslný pohár vítězů převzal Viliam Páleník, a na závěr lze jen dodat „sláva vítězným a čest poraženým“.



PERNÉ STATISTICKÉ DNY POD PÁLAVOU 2024 REPORT ON STATISTICAL DAYS 2024

Kolektiv Ústavu matematiky FSI VUT v Brně

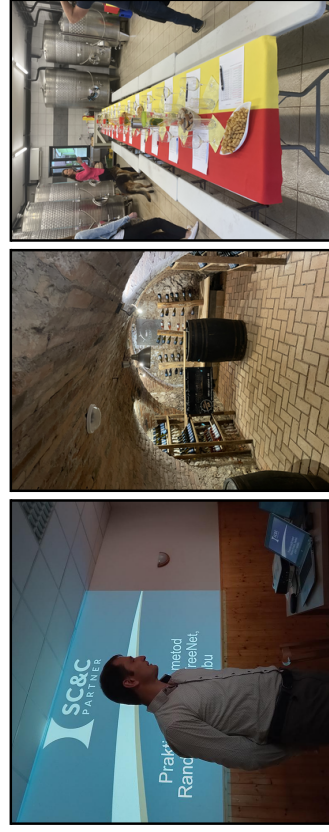
Adresa: Fakulta strojního inženýrství Vysokého učení technického v Brně,
Technická 2896/2, 61669 Brno-Královo Pole

E-mail: hubnerova@fme.vutbr.cz, matej.benko@vutbr.cz

I letos jsme navázali na tradici Statistických dnů pořádaných ČStS od roku 1994 a setkali jsme se v obci Perná na Pálavě 24. – 26. května 2024. Letošní 16. ročník setkání organizoval Ústav matematiky Fakulty strojního inženýrství Vysokého učení technického v Brně ve spolupráci se společností SC&C Partner, s.r.o.

1. den: příjezd, první přednášky a ochutnávka vín

Hned v prvních přednáškách jsme se dozvěděli zajímavosti a způsob implementace Shewhartových regulačních diagramů v podání předsedy ČStS Ondřeje Vencálka a Tomáše Jurczyka. Po přestávce nás Zdeněk Karpíšek obeznámil s různými mírami závislosti náhodných jevů a po něm David Kraus představil své výsledky o neurčitosti rekonstrukcí funkcionálních trajektorií. Po poslední přestávce tohoto odpoledne jsme se vrhli k aplikacím statistiky v softwaru Minitab, a to konkrétně využití Random Forests, TreeNet, a CARTu v podání Tomáše Trávníčka z SC&C Partner. Po výdatné večeři jsme se vybrali na ochutnávku vín do Vinařství u Matoušků. Ochutnali jsme spolu třináct vín a to konkrétně osm bílých, dvě růžové a tři červené. Všechna vína měla společné to, že byla výtečná.



Zavedeme proto tuto obecnou definici entropie $H(p_1, p_2, \dots, p_n)$:

Definice 2. Pro diskrétní n. v. $X = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, $\sum_i p_i = 1$, $0 \leq p_i \leq 1$ pro všechna i , definujeme entropii $H(p_1, p_2, \dots, p_n)$ takto:

- $H(p_1, p_2) = 2 \cdot \min(p_1, p_2)$,
- pro $n \geq 3$ platí

$$H(p_1, p_2, \dots, p_n) = H(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_{n-1}} + p_{i_n}) + \left(\frac{p_{i_{n-1}}}{p_{i_{n-1}} + p_{i_n}} \right) \cdot H\left(\frac{p_{i_{n-1}}}{p_{i_{n-1}} + p_{i_n}}, \frac{p_{i_n}}{p_{i_{n-1}} + p_{i_n}}\right), \quad (2)$$

kde $p_{i_1} \geq p_{i_2} \geq \dots \geq p_{i_{n-1}} \geq p_{i_n} \geq 0$ a $p_{i_{n-1}} + p_{i_n} > 0$.

Použijeme-li tuto definici, dostaneme pro $H(p_1, p_2, \dots, p_n)$ vztah (2) ve tvaru

$$\begin{aligned} H(p_1, p_2, \dots, p_n) &= 2 \cdot \min(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_{n-1}} + p_{i_n}) + \\ &+ (p_{i_{n-1}} + p_{i_n}) \cdot 2 \cdot \min\left(\frac{p_{i_{n-1}}}{p_{i_{n-1}} + p_{i_n}}, \frac{p_{i_n}}{p_{i_{n-1}} + p_{i_n}}\right) = \\ &= 2 \cdot \min(p_{i_1}, p_{i_2} + \dots + p_{i_{n-1}} + p_{i_n}) + 2 \cdot \min(p_{i_2}, p_{i_3} + \\ &+ \dots + p_{i_{n-1}} + p_{i_n}) + \dots + 2 \cdot \min(p_{i_{n-1}}, p_{i_n}), \end{aligned}$$

kde již můžeme vypustit podmínku $p_{i_{n-1}} + p_{i_n} > 0$.

Definice 2 vyhovuje všem Fadějevovým podmínkám, ale není Shannonovou entropií:

- Funkce $H(p_1, p_2) = 2 \cdot \min(p_1, p_2)$, $p_1 + p_2 = 1$, je spojitou funkcí svých proměnných a kladná např. pro $p_1 = p_2 = 0,5$;
- $H(p_1, p_2, \dots, p_n)$ je symetrickou funkcí svých proměnných;
- určení $H(p_1, p_2, \dots, p_n)$ je jednoznačné.

Entropie $H(p_1, p_2, \dots, p_n)$ má následující vlastnosti:

- $H(0,5;0,5) = 2 \cdot \min(0,5;0,5) = 1$. Proto jsme kdysi nazvali tuto jednotku *lit* [3].
- $H(1,0,0,\dots,0) = 0$ [lit],
- $H\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) = 2 \cdot \frac{n-1}{n} = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) < 2$ [lit],
- $0 \leq H(p_1, p_2, \dots, p_n) < 2$ [lit],

$$e) H(p_1, p_2, 0, \dots, 0) = H(p_1, p_2), p_1 + p_2 = 1, 0 \leq p_1, p_2 \leq 1.$$

Příklad 1b. Necht' n. v. X ($p = 0,25; 1 - p = 0,75$) pak máme

$$H(p, 1 - p) = H(1 - p, p) = 2 \cdot \min(p, 1 - p) = 0,5 \text{ [bit]}$$

$$H_0(X) = \log_2 2 = 1 \text{ [bit]}$$

$$H_1(X) = 0,811 \text{ [bit]}$$

$$H_2(X) = -\log_2(0,25^2 + 0,75^2) = 0,67807 \text{ [2-bit]}$$

$$H_\infty(X) = -\log_2 \max(0,25; 0,75) = 0,41503 \text{ } [\infty\text{-bit}].$$

Nyní se podíváme na další z entropií, tzv. Tsallisovu entropii. Je zajímavá také tím, že ve své formuli neobsahuje logaritmus. Brazilijský fyzik řeckého původu C. Tsallis (*1943) zavedl tuto entropii při zobecňování Boltzmann-Gibsovy fyzikální entropie [5].

Definice 3. Tsallisovou entropií řádu q nazýváme entropii, která se určuje pro diskrétní náhodnou veličinu $X(p_1, \dots, p_n)$, $\sum_i p_i = 1$, $0 \leq p_i \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, n$ ze vztorce

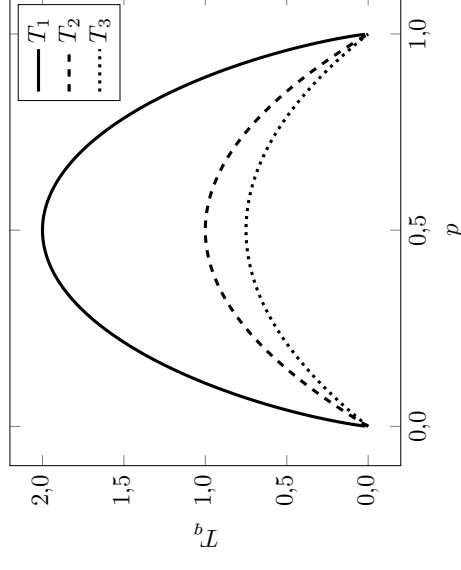
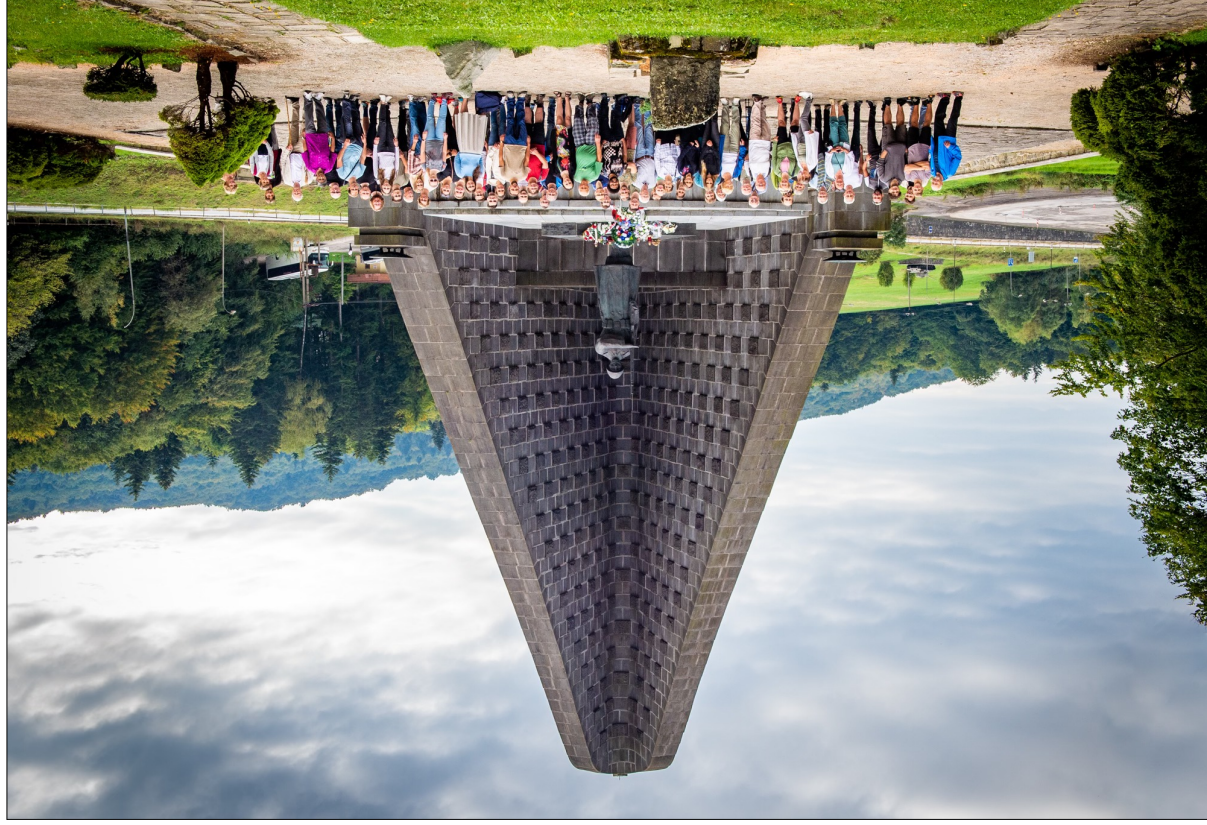
$$T_q(X) = \frac{k}{q-1} \left(1 - \sum_{i=1}^n p_i^q \right), \quad \text{kde } k > 0, q > 0, q \neq 1. \quad (3)$$

Volbou parametru k se upravuje jednotka této entropie. Jednotka této entropie nemá název, ale pro pořádek ji nazveme $(k, q)\text{-bit}$.

Vlastnosti $T_q(X)$:

- 1) Entropie $T_q(X)$ je invariantní vůči kterékoliv permutaci $(p_1, \dots, p_n)$.
- 2) $\lim_{q \rightarrow 1} T_q(X) = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{k}{q-1} (1 - \sum_{i=1}^n p_i^q) = \lim_{q \rightarrow 1} k \cdot \frac{-\sum_{i=1}^n p_i^q \cdot \ln p_i}{1} = k \cdot (-\sum_{i=1}^n p_i \ln p_i)$. Proto se tato entropie značí $T_1(X) = H_1(X)$.
- 3) $T_2(X) = k \cdot (1 - \sum_{i=1}^n p_i^2)$ protože $\sum_i p_i^2 \leq 1$, je $0 \leq T_2(X) \leq k$. V případě $n = 2$ je pak $T_2(X) = k \cdot 2 \cdot p \cdot (1 - p)$, tedy $0 \leq T_2(X) \leq k \cdot 0,5$. Proto je někdy vhodné volit $k = 2$, aby $0 \leq T_2(X) \leq 1$.
- 4) $\frac{dT_q}{dq} = \frac{d}{dq} \left(\frac{k}{q-1} (1 - \sum_{i=1}^n p_i^q) \right) = k \cdot (q-1)^{-2} \cdot (-\sum_{i=1}^n p_i^q \cdot \ln p_i) \leq 0$, tedy $T_q(X)$ je nerostoucí funkcí pro všechna přípustná q . Vezmeme-li v úvahu ještě vlastnost 2), platí to i pro $q > 0$.
- 5) Pro n. v. $X(1, 0, \dots, 0)$ je $T_q(X) = 0$ pro všechna přípustná k a q .





Obrázek 4: Graf $T_q(X)$ pro n.v. $X(p, 1-p)$ a $k=2$, $q=1, 2, 3$.
 $T_1 = -2 \cdot \{p \ln p + (1-p) \ln(1-p)\}$; $T_2 = 4 \cdot p \cdot (1-p)$; $T_3 = 3 \cdot p \cdot (1-p)$.

Z Fadějevových axiomů Tsallisova entropie $T_q(X)$ splňuje samozřejmě první a druhý. Obecně pro všechna $q > 0$, $q \neq 1$ třetí axiom nesplňuje, protože platí

$$p_n^q = (q_1 + q_2)^q \neq q_1^q + q_2^q.$$

Není tedy pro uvedená q entropií ve Fadějevově smyslu. Entropie $T_1(X)$ samozřejmě Fadějevovy axiomy splňuje.

Uvažujeme ještě jednu možnost odhadu neurčitosti diskrétní n.v. X (opět bez logaritmu v definičním vztahu). Je to tzv. lineární entropie $L(X)$.

Definice 4. Lineární entropie pro n.v. $X(p_1, \dots, p_n)$, $\sum_i p_i = 1$, $0 \leq p_i \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, n$, je určena vztahem

$$L(X) = k \cdot \sum_{i=1}^n p_i (1-p_i), \quad k > 0. \quad (4)$$

Vlastnosti $L(X)$:

- 1) Lin. entropie $L(X)$ je symetrickou funkcí svých proměnných $p_1, \dots, p_n$.
- 2) Pro lineární entropii $L(X)$ platí: $L(X) = k \cdot (\sum_i p_i - \sum_i p_i^2) \geq 0$, rovnost nastává pro $X = (1, 0, \dots, 0)$.

- 3) Pro $n = 2$ je $L(X) = L(p, 1 - p) = k \cdot p(1 - p) = I_2(X)$.
- 4) Pro n. v. $X = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$ je $L(X) = k \cdot (1 - \frac{1}{n}) < k$.
- 5) Platí $H_1(X) = H_1(p_1, \dots, p_n) = -\sum_i p_i \ln p_i \geq L(X) = \sum_i p_i(1 - p_i)$. To vyplývá z toho, že $p_i - 1 \geq \ln p_i$ a pak je $p_i(1 - p_i) \leq -p_i \ln p_i$ pro všechna i .
- 6) Jednotka této entropie také zavedena není, budeme ji zde označovat *bit*².

Lineární entropie $L(X)$ odpovídá neurčitosti n nezávislých dichotomických rozhodování:

$$x_1 - \text{non } x_1; \quad x_2 - \text{non } x_2; \quad x_n - \text{non } x_n.$$

Poznámka: V práci [16] je ještě diskutována α -entropie h_α zobecněného pravděpodobnostního schématu. Přitom je třetí Faddějevův požadavek zobrazen na tvar

$$h_\alpha(X) = h_\alpha(tp_1, (1-t)p_1, p_2, \dots, p_n) = h_\alpha(p_1, \dots, p_n) + p_1^\alpha \cdot h_\alpha(t, 1-t).$$

4. Aplikace

Aplikace není snadná. Obtíže již může činit vymezení prvotního (observačního) jevového pole Ω, A , kde Ω je idealizovaný pozorovaný prostor, A je σ -algebra podmnožin z Ω . Dříve zmíněná množina Ω_n není počátkem zkoumání, je jen součástí schématu pro popis výsledku realizace n. v. X , která přislouží schématu $P = [\Omega_n, A_n, P_n]$. Míra jistoty realizace n. v. X , patřící prostoru P je entropie. Smyslem aplikace je určení vztahu mezi prvotním jevovým polem $[\Omega, A]$ a konečnými množinami Ω_n, A_n . Tento vztah je dán náhodnou veličinou Y , která má hodnoty v Ω_n a platí pro pravděpodobnostní prostory $[\Omega, A, P]$ a $[\Omega_n, A_n, P_n]$, že

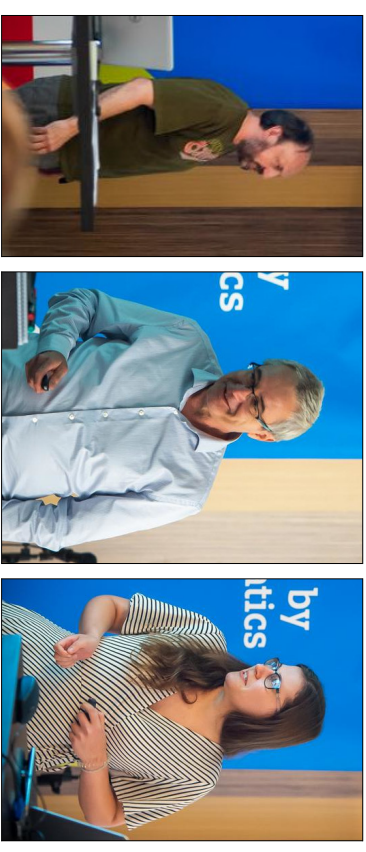
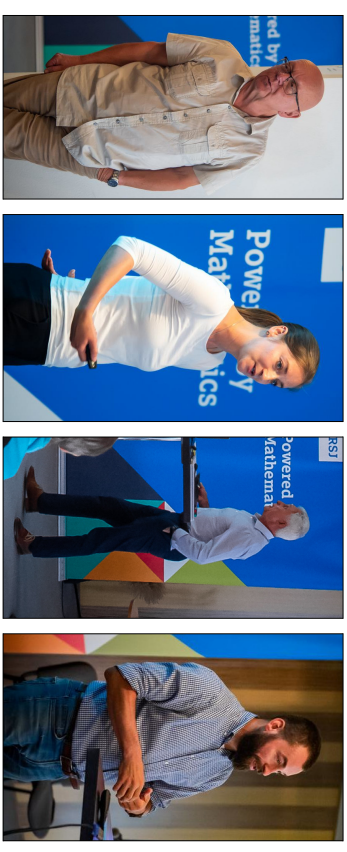
$$P(\{\omega \in \Omega; Y(\omega) = x_i\}) = P_n(X = x_i) = p_i.$$

Pokud se podaří aspoň dostatečně přesně definovat n. v. Y , musíme se pokusit na základě měření o odhad pravděpodobností p_i . Nemůžeme, až na výjimky, stanovit skutečnou hodnotu příslušné entropie, ale jen její odhad, vycházející z relativních četností $\hat{p}_i = \frac{N_i}{N}$ jednohlivých variant x_i , kde N_i je počet jejich výskytů v souboru N pozorování. Protože vycházíme z odhadů pravděpodobností, vede použití příslušných vzorců pouze k odhadu odpovídající entropie. Takový odhad ale může být vychýlený, zvlášť když výraz pro entropii obsahuje logaritmus, tj. se systematickou chybou. Každý výpočet by měl obsahovat nejen odhad pro entropii, ale i chybu tohoto odhadu.

programu bylo spíše „sériové“, nikoliv „paralelní“. Toto zapojení mělo řadu pravděpodobně nezamýšlených efektů. Posluchač vždy chtěl nechtě porovnávat kvalitu přednášek. Organizátoři Robustu si mohou blahopřát, že v konkurenci zahraničních hostů se významně prosadili zejména (ovšem nikoliv výlučně) zvaní řečníci Robustu. Ti byli z řad „domácích“: Daniel Klein z Košic, David Kraus z Brna, Tomáš Mrkvička z Českých Budějovic, Samuel Rosa z Bratislavy či Michal Pešta z Prahy. Z přednášek zahraničních účastníků zaujal zejména Marc Hallin a Peter Filzmoser.

Další Robust se kvapem blíží – zbývá něco málo přes rok. Kde bude? To ještě nevím, ale těším se, že opět v „nějaké díře“, jak zpívá Zdeněk Fibich. Důležitější otázkou než „Kde bude?“ je však otázka „Jaký bude?“ To záleží na tom, jak se budou cítit jeho účastníci. Věřím, že organizátoři udělají maximum pro to, aby se všichni účastníci na Robustu cítili dobře.

V Prostějově dne 7. listopadu 2024, Ondřej Vencálek



ROBUSTNÍ MODEL KONFERENCE SE SMÍŠENÝMI EFEKTY REPORT ON THE ROBUST 2024 CONFERENCE

Ondřej Vencálek

E-mail: ondrej.vencalek@upol.cz

Dvacátá třetí letní škola JČMF ROBUST 2024 se uskutečnila ve dnech 8. až 13. září 2024 v Bardějově. Při celkovém počtu přibližně 90 účastníků jde o jednu z největších (ne-li největší) letošních konferencí českých a slovenských matematiků-statistiků. Jedním ze spoluorganizátorů konference je tradičně i Česká statistická společnost. Rád bych se s odstupem dvou měsíců ke konferenci vrátil a sepsal několik svých dojmu a postřehů. Jak již název tohoto textu napovídá, půjde tentokrát o dojmy „smíšené“.

Stalo se jakousi tradicí, že ozvěny konference Robust začínají vždy zhodnocením odlehlosti lokality, kde se konference uskutečnila. To není vzhledem k názvu konference překvapivé, vždyť problém „odlehlosti pozorování“ stál u zrodu celého odvětví statistiky známého jako „robustní metody“. Lze konstatovat, že lokalita Bardějov, v níž se letos konference uskutečnila, je mezi všemi dějišti Robustu jednak nejvzdálenější od Prahy (vzdušnou čarou 500 km, přičemž tato nejkratší spojnice vede mj. přes území Polska), ale rovněž je natolik vzdálená od hlavního města Slovenska (vzdušnou čarou 340 km), že je jen málo míst v zemi našich východních sousedů, která by byla od Bratislavy dále. To se odrazilo mj. v tom, že i mnozí účastníci konference z metropole na Dunaji byli v Bardějově vůbec poprvé.

Účastníci, kteří na Robust jezdí opakovaně a rádi, se pravděpodobně většinou shodnou na tom, že volba zajímavá a ne příliš známé lokality je jednou z hlavních předností Robustu. Také proto je této volbě organizátoři tradičně věnována velká pozornost a péče.

Organizátoři se také tradičně snaží udělat konferenci co nejlevněji, aby umožnili účast co největšímu počtu zájemců. Stojí za zaznamenání, že šestidenní konferenci dokázali v roce 2024 uspořádat při konferenčním poplatku *zahrnujícím ubytování a stravu* ve výši 6 250 Kč (resp. 250 Euro), přičemž pro studenty byla tato částka ještě o něco nižší (5 500 Kč, resp. 220 Euro). Tedy všichni čest, toto se (opět) povedlo.

Důležitým rysem, který podstatně ovlivnil atmosféru prvních dní letošního Robustu, byla účast významných zahraničních hostů, a to v rámci „paralelně“ konaného workshopu AMISTAT 2024 (Analytical Methods in Statistics). Slovo paralelně uvádím v uvozovkách, neboť zapojení workshopu do

Je-li $h(p_1, p_2, \dots, p_n)$ entropie se spojitými parciálními derivacemi $\frac{\partial h}{\partial p_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, je možné určit chybu Δh měření v bodě $(\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_n)$ ze vztahu

$$\Delta h \approx \left| \sum_i \frac{\partial h(\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_n)}{\partial p_i} \Delta p_i \right|.$$

Pro odhad $|\hat{p}_i - p_i| = \Delta p_i$ je možné použít pro velká N přibližného vztahu, platného s pravděpodobností $1 - \alpha$

$$\Delta p_i \approx u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}_i}{N} (1 - \hat{p}_i)},$$

kde $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ je $(1 - \frac{1}{2}\alpha)$ -tý kvantil normovaného normálního rozdělení. Podle tohoto vztahu je při $\alpha = 0,05$ pro $u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,96$. Odhady chyb jednotlivých entropií se pak budou počítat podle následujících vztahů

$$\Delta H_\alpha(X) \approx \frac{1}{\ln 2} \frac{\alpha}{|1 - \alpha|} \cdot \frac{1}{\sum_i p_i^\alpha} \cdot \sum_i p_i^{\alpha-1} \Delta p_i \quad [\alpha\text{-bit}]$$

$$\Delta H(X) \approx n(n-1) \cdot \max_i \Delta p_i$$

$$\Delta T_q(X) \approx \frac{kq}{|q-1|} \cdot \sum_i p_i^{q-1} \cdot \Delta p_i$$

$$\Delta L(X) \approx 2 \cdot \sum_i |1 - 2p_i| \cdot \Delta p_i,$$

kde všude dosazujeme za p_i odhad $\hat{p}_i$.

Příklad 2. Mějme n. v. $X = (p_1, p_2, p_3)$, kde $0 \leq p_i \leq 1$, pro $i = 1, 2, 3$, $\sum_1^3 p_i = 1$. Na vzorku o rozsahu $N = 100$ byl proveden odhad pravděpodobností p_i s výsledkem $\hat{p}_1 = 0,2$; $\hat{p}_2 = 0,5$; $\hat{p}_3 = 0,3$. Odhadneme některé z předchozích entropií. Budeme volit $\alpha = 0,05$. Pak je pro $\Delta p_1 \approx 1,96 \cdot 0,1 \cdot \sqrt{0,2 \cdot 0,8} = 0,078$; $\Delta p_2 \approx 1,96 \cdot 0,1 \cdot \sqrt{0,5 \cdot 0,5} = 0,098$; $\Delta p_3 \approx 1,96 \cdot 0,1 \cdot \sqrt{0,3 \cdot 0,7} = 0,090$.

Pro odhady jednotlivých entropií pak máme

$$\Delta H_2(X) \approx 2 \cdot \frac{1}{0,38} \cdot (0,2 \cdot 0,078 + 0,5 \cdot 0,098 + 0,3 \cdot 0,090) = 0,482.$$

Pro entropii $H_2(X)$ tak je

$$\begin{aligned} H_2(X) &\approx -\log_2 0,38 \pm 0,482 = 1,40 \pm 0,482 \quad [2-bit]. \\ H(X) &\approx 2 \cdot \min(0,5; 0,5) + 2 \cdot \min(0,3; 0,2) \pm 6 \cdot 0,1 = 1,4 \pm 0,6 \quad [bit]. \\ T_2(X) &\approx 2 \cdot 2(1 - 0,38) \pm (0,2 \cdot 0,078 + 0,5 \cdot 0,098 + 0,3 \cdot 0,090) = \\ &= 2,48 \pm 0,09 \quad [(2,2) - bit] \quad (\text{volili jsme tedy } k = 2). \\ L(X) &= 2 \cdot (1 - 0,38) \pm 2 \cdot \{(1 - 2 \cdot 0,2) \cdot 0,078 + (1 - 2 \cdot 0,5) \cdot 0,098 + \\ &+ (1 - 2 \cdot 0,3) \cdot 0,090\} = 1,24 \pm 0,16 \quad [bit^2]. \end{aligned}$$

Jak je vidět, všechny odhady entropií jsou zatíženy velkou chybou. Je proto třeba používat poměrně rozsáhlých náhodných výběrů. Aby byla v našem příkladu chyba desetkrát menší, což by bylo přijatelné, měli bychom rozsah šetření N zvětšit na 10 000.

5. Závěr

K odhadu neurčitosti máme poměrně velké množství měř [1, 5, 14]. To je proto, že ne každá experimentální situace je pro určitou míru vhodná. Rozhoduje intuice a zkušenost experimentátora, která určuje vhodnost konkrétní míry.

Všechny míry neurčitosti diskretní náhodné veličiny X jsou nezáporné a jejich podstatnou vlastností je, že pro rovnoměrné rozdělení této veličiny nabývají nejvyšších možných hodnot (nebo se jim blíží) a v případě $X = (1, 0, 0, \dots, 0)$ jsou nulové. Vždy při odhadu neurčitosti se předpokládá buď znalost rozdělení n . v. X (a to spíše výjimečně) nebo jen statistický odhad rozdělení (neurčitost je zde její pravděpodobnostní charakteristika). Naznačili jsme, že je potřeba realizovat odhad neurčitosti rozsáhlejším experimentem.

Někdy místo znalosti rozdělení náhodné veličiny X je možné využít i expertního odhadu (zvláště v humanitních vědách), pak je možné se opírat o teorii fuzzy množin a využít některou z fuzzy měr neurčitosti [10, 11]. Jsou však i teorie, které neurčitosti počítají z jiných znalostí, například Dempster-Schaferova teorie [3].

Poděkování

Autor děkuje ing. Pavlu Střížovi, Ph.D., za technické dopracování tohoto příspěvku včetně obrázků.

Reference

- [1] Arndt, C.: *Information measures: Information and its Description in Science and Engineering*, Springer, 2004, ISBN 978-3-540-40855-0. cit. 4, 16
- [2] Cover, T.M., Thomas, J.A.: *Elements of Information Theory*, 2. Edition, Wiley-Interscience, 2006, ISBN 0-471-24195-4. cit. 4
- [3] Půlpán, Z.: *K problematice vágnosti v humanitních vědách*, Academia, Studie 2/1997, ISBN 80-200-0648-6. cit. 11, 16
- [4] Rényi, A.: On measures of information and entropy, *Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematics, Statistics and Probability*, 1961, pp. 547–561. cit. 4, 6
- [5] Tsallis, C.: On measures of information and entropy, *Journal of Statistical Physics* 52, 1988, pp. 479–487. cit. 4, 12 a 16
- [6] Kukul, J.: Entropie nejen ve fyzice, *Rozhledy matematicko-fyzikální* č. 4, roč. 86, 2011, str. 13–20. cit. 4
- [7] Ben-Bassat, M., Raviv, J.: Rényi's entropy and the probability of error, *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 24, No. 3, pp. 324–331, May 1978. cit. 4
- [8] Rényi, A.: *Teorie pravděpodobnosti*, Academia, Praha 1972. cit. 4
- [9] Rényi, A.: On the dimension and entropy of probability distributions, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 10, 1959, pp. 193–215. cit. 7
- [10] Půlpán, Z.: *Odhad informace z dat vágní povahy*, Academia, Praha 2012, ISBN 978-80-200-2076-5. cit. 10, 16
- [11] Půlpán, Z.: Informace a neurčitosti v expertních odhadech, *Informační Bulletin České statistické společnosti*, roč. 33, 1, str. 5–19. cit. 10, 16
- [12] Černý, J.: *Entropia a informácia v kybernetike*, Bratislava, Alfa 1981. cit. 4, 9
- [13] Kullback, S.: *Information Theory and Statistics*, New York, John Wiley 1959. cit. 4
- [14] Vajda, I.: Teória informácie a štatistického rozhodovania, Bratislava, Alfa 1982. cit. 4, 16
- [15] Havrda, J.: *Stochastické procesy a teorie informace*, ČVUT, Praha 1982. cit. 4
- [16] Vajda, I.: Axiomy α -entropie zobecněného pravděpodobnostního schématu, *Kybernetika*, č. 2, roč. 4, 1968. cit. 14
- [17] Fadějev, D.K.: K ponjatiu entropií konečnouj věrojatnostnoj schemy, *Uspěchi matematičeskich nauk*, č. 11, 1956. cit. 9
- [18] Zvárová, J.: On asymptotic Behavior of Sample Estimator of Rényi's Information of order α , In: *Transaction of the 6th Prague Conference on Information Theory*, Academia, Prague 1973. cit. 7