

POZVÁNKA NA KONFERENCI ROBUST 2026

INVITATION TO THE ROBUST 2026 CONFERENCE

Jaromír Antoch

E-mail: antoch@karlin.mff.cuni.cz



ROBUST 2026
1980 – 2026



Vážené kolegyně, vážení kolegové,

dne 18. ledna 2026 bude v Srní slavnostně zahájena dvacátá čtvrtá zimní škola **JČMF ROBUST 2026**, organizovaná skupinou pro výpočetní statistiku při **CMS JČMF** již od roku 1980. Mezi spolu-organizátory tradičně patří **KPMS MFF UK, Česká statistická společnost a Slovenská statistická a demografická spoločnosť**.

ROBUST 2026 bude věnován, tak jako vždy, současným trendům statistiky, pravděpodobnosti, ekonometrie, finanční a pojistné matematiky, optimalizace a analýzy dat. Pozornost též bude věnována problematice výuky těchto oborů.

Nabídku k přednesení zvaných přednášek zatím přijali (s řadou dalších se jedná):

- D. Hlubinka, MFF UK, Praha
- K. Hron, UPOL, Olomouc

Vedle zvaných přednášek se počítá se sděleními účastníků a přednáškově–posterovou sekci doktorandů a studentů.

- **Datum a místo konání:** 18.–23. ledna 2026 (ne-pá), **hotel Vydra, Srní**; GPS 49.0954908 N&13.4767314 E.
- **Ubytování:** Ve dvou až čtyřlůžkových pokojích. Za příplatek se pokusíme zajistit individuální ubytování, což vzhledem k omezené kapacitě hotelu nemůžeme stoprocentně zaručit!
- **Stravování:** Celodenní (neděle večere – pátek oběd). Podrobnosti ke stravě budou upřesněny.
- **Kulturní program:** Na středu plánujeme, dovolí-li počasí, výlet k **pramenům Vltavy**.
- **Technické vybavení:** K dispozici bude notebook, datový projektor a přenosná prezentační tabule (flip chart).
- **Příhláška a registrace:** Registrace je otevřena na adrese <http://robust.nipax.cz>. Pro ty, kteří se zúčastní předchozích Robustů, jsme zachovali již dříve vložené osobní údaje. Zkontrolujte je a v případě změn opravte. Při jakýchkoli potížích s registrací se prosím obraťte na kolegu Dohnala.
- **Abstrakt:** **Na svoji přednášku myslíte již dnes**, a abstrakt v **TeXu** spolu s pdf souborem vložte přes registrační stránku na adrese **robust.nipax.cz nejpozději 15. září 2025**.
- **Stipendia:** Česká statistická společnost vypsala několik stipendií; podrobnosti viz www.statapol.cz.
- **Publikace:** V případě zájmu účastníků připravíme speciální číslo časopisu Statistika; podrobnosti viz **Zprávy**.
- **Konferenční poplatek:** 7500 Kč. Pro studenty řádného studia a interní PGS studenty bez vedlejšího úvazku 6750 Kč. Zahrnuto je ubytování, strava a náklady organizačního výboru.
- **Bankovní spojení:** Účet 2001215985/2010 u Fio banky. Příjemce: Česká matematická společnost, sekce Jednoty Českých matematiků a fyziků, Žitná 609/25, 11000 Praha 1. Variabilní symbol 20265xxx, kde xxx zvolte sami a vložte do Vaší registrační stránky! Jako informaci pro příjemce platby uveďte Vaše jméno (instituci). Vzhledem k tomu, že akce se koná na začátku roku 2026, paní Naxerová všem připraví po přihlášení zálohovou fakturu. Daňový doklad (fakturu) zašleme během konference. Budete-li platit na místě, což nedoporučujeme, dohodněte se s námi předem.
- **Poznámky:** V lednu je na Šumavě vrcholná sezóna. Proto musíme koncem září 2025 závazně objednat kapacitu hotelu pro naše potřeby a počátkem října zaplatit nevratnou zálohu i za místa, která případně nevyužijeme. Hotel poté námi nevyužitou kapacitu začne nabízet na volném trhu, a nám již nebude dále k dispozici. Vzhledem k tomu Vás žádáme o registraci a zaplacení zálohových faktur do konce září 2025. Pro později přihlášené se pokusíme zajistit ubytování v některém dalším ubytovacím zařízení v Srní. Není jich až tak mnoho, a podobná alternativa může vyjít podstatně draž.
- **Storno poplatky:** Při zaplaceném konferenčním poplatku a odřeknutí účasti:
 - 1. října – 31. prosince 2025: storno poplatek je 50%.
 - 1. ledna 2026 či později: storno poplatek je 80%.
 - Nedostaví-li se účastník, storno poplatek je 100%.
- **Pro stanovení data pro zrušení účasti je rozhodující datum zprávy informující organizátory o zrušení účasti.**
- **Další oznámení:** Veškeré informace budou zveřejňovány na www.karlin.mff.cuni.cz/~antoch a dle potřeby distribuovány e-mailem nebo klasickou poštou.
- **Adresa pro korespondenci:** ROBUST 2026, MFF UK, KPMS, Sokolovská 83, 18675 Praha 8 – Karlín, tel. 221 913 287; e-mail: antoch@karlin.mff.cuni.cz

V Praze na Svatého Vintře .

Na setkání se těší organizátoři a – především – účastníci.

ZPRÁVA O ČINNOSTI ČSTS V ROCE 2024

CZECH STATISTICAL SOCIETY IN 2024

Ondřej Vencálek

E-mail: ondrej.vencalek@upol.cz

1. Členská základna

K 31. prosinci 2024 měla ČStS **211 členů**. V průběhu roku 2024 přibýlo šest nových členů, třem členům bylo členství ukončeno, celkový počet členů se zvýšil o tři.

2. Členská schůze ČStS

Členská schůze ČStS se uskutečnila 16. května 2024 v prostorách Českého vysokého učení technického v Praze. Zúčastnilo se celkem 20 členů. Byla přečtena a schválena zpráva o činnosti za rok 2023 a zpráva o hospodaření za rok 2023. Členská schůze hlasováním schválila zprávu o činnosti ČStS, zprávu o hospodaření ČStS za uplynulé období, zprávu revizora a návrh rozpočtu ČStS na rok 2024.

V odborné části programu vystoupil Ondřej Mamula z Českého institutu informatiky, robotiky a kybernetiky s přednáškou *Energy Nest – hybridní zdroj energie: od myšlenky k realizaci*.

3. Akce ČStS

- **Statistické dny v Perné** se uskutečnily 24.–26. května 2024 v Perné na úpatí Pálavy. Celkem 32 účastníků vyslechlo 16 odborných příspěvků. Organizováno ve spolupráci s Ústavem matematiky, Fakulta strojního inženýrství, VUT v Brně za podpory SC&C partner.
- **23. letní škola JČMF Robust** proběhla ve dnech 8.–13. září 2024 v Bardějově. Bylo prezentováno 74 odborných příspěvků. Zúčastnilo se celkem 90 účastníků: včetně dvanácti účastníků ze Slovenska, čtyř z USA, tří z Rakouska, dvou ze Švédska, po jednom zástupci měly Belgie, Kanada, Francie, Velká Británie a Nigérie.
- **Mikuklášský statistický den** byl pořádán dne 5. prosince 2024 v praktiku KPMS MFF v Praze-Karlíně. Zúčastnilo se 34 účastníků (v předchozím roce 21) a bylo předneseno pět odborných příspěvků.

4. Akce spolupořádané ČStS

- Rakouské statistické dny ve Vídni (hlavním organizátorem Rakouská statistická společnost) se uskutečnily 3.–5. dubna 2024.
- 12. ročník konference OSSConf (Otvorený softvér vo vzdelávaní, výskume a v IT riešeniach) v Žilíně se uskutečnil 2.–4. července 2024.

5. Spolupráce s Českým statistickým úřadem

Český statistický úřad je dlouhodobě partnerem ČStS a podporuje její činnost například zajištěním tisku Informačního bulletinu ČStS, prostor pro konání členských schůzí ČStS a publicity v časopisech ČSÚ (např. rozhovory s členy v časopise Statistika a My, informace o společných akcích) a na sociálních sítích. Dne 15. srpna 2024 byl udělen písemný souhlas Českého statistického úřadu s umístěním sídla a poštovní schránky České statistické společnosti na adrese Na Padesátém 3268/81, Praha 10 – Strašnice. Byla tak obnovena dohoda, která naší společnosti již dříve umožňovala mít sídlo v budově ČSÚ v Praze.

6. Členství v mezinárodních organizacích

Naše společnost je od roku 2011 členem Federace evropských národních statistických společností FENStatS (The Federation of European National Statistical Societies). Členové ČStS jsou průběžně informováni o dění ve FENStatS. Aktivita uskupení FENStatS se v tomto roce výrazně zvýšila, o čemž svědčí např. množství zveřejňovaných zpráv na stránce <https://www.fenstats.eu/news>. Valné shromáždění FENStatS se konalo dne 24. září 2024. ČStS reprezentoval místopředseda Ondřej Vozár. Dne 10. prosince 2024 proběhla online schůzka iniciativy Young Statisticians Europe (YSE), která dosud byla součástí FENStatS (<https://www.fenstats.eu/YSE>). Jednalo se o budoucí podobě tohoto sdružení. ČStS reprezentoval předseda Ondřej Vencálek.

7. Členství v Radě vědeckých společností ČR

ČStS je členem Rady vědeckých společností ČR (RVS). Plenární zasedání RVS se konalo 17. dubna 2024 v Praze. ČStS na jednání zastupoval Jakub Fischer. Na konci roku byla RVS odevzdána zpráva o činnosti naší společnosti.

POZVÁNKA NA KONFERENCI STAKAN 2025

INVITATION TO THE STAKAN 2025 CONFERENCE

Martina Litschmannová

E-mail: Martina.Litschmannova@vsb.cz

Konference STATističtí KANtoři je společnou akcí České statistické společnosti a Slovenskej štatistickej a demografickej spoločnosti. Tyto společnosti organizují česko-slovenské konference každý lichý rok a země se pravidelně střídají. V České republice se konference koná pod názvem STAKAN a na Slovensku pod názvem PRASTAN.

V letošním roce je tato akce pořádána ve spolupráci s Katedrou matematické analýzy a aplikací matematiky z Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého a Katedrou aplikované matematiky z Fakulty elektrotechniky a informatiky Vysoké školy báňské – Technické univerzity v Ostravě.

Kdy: 30. 5. – 1. 6. 2025

Kde: Pavlov, obec v srdci Pálavy.

Ubytování: Penzion u Bednářů, Přehradní č.p. 93,
<https://pensionubednaru.cz/>, GPS: 48,8746565° s.š., 16,6749843° v.d.

Zaměření konference: Výuka statistiky nejen na vysokých a středních školách aneb Jak to učím já!

- Výuka statistiky na VŠ pro matematiky vs. výuka statistiky na VŠ pro nematematiky: postřehy, zkušenosti, náměty, výukové materiály.
- Výuka v podání doktorandů aneb „Pomóc, prej mám učit statistiku!“
- Výuka statistiky na SŠ: co chtějí a co mohou statistici říct středoškolákům.
- Popularizace statistiky.
- Osobnost učitele jako klíčový prvek vzdělávacího procesu aneb učitelem se člověk rodí / stává.
- Další témata týkající se pravděpodobnosti a statistiky (nejen její výuky).

Registrace a bližší informace: <https://www.statspol.cz/STAKAN25>

Za organizátory se na Vás srdečně těší Tomáš Chupán, Martina Litschmannová, Tomáš Löster, Eva Schäfferová a Ondřej Vencálek!

KRÁTKÉ OHLÉDNUTÍ ZA MIKUKLÁŠEM 2024 A BRIEF LOOK BACK AT MIKUKLÁŠ 2024

Marek Omelka

E-mail: Marek.Omelka@mff.cuni.cz

Tradiční Miku(k)lášský den se uskutečnil ve čtvrtek 5. prosince 2024. Setkání „vykopl“ krátce po 13.00 Honza Kalina se svým pohledem na budoucnost medicíny založené na informacích a role statistika/informatika v ní. Následoval příspěvek Markéty Pavlíkové o její spolupráci na poli fyzioterapie. Po krátké přestávce pozornost všech přítomných upoutal Jirka Dvořák, který nejen nastínil, jak momentálně vypadá svět automatů (v casinech) v českém pohraničí, ale také jak statisticky prokázat podezření na nezvykle vysoké výhry. Poté Ondra Vencálek připomněl osobnost Waltera Shewharta a výročí 100 let od jeho návrhu tzv. regulačních diagramů. V posledním příspěvku Ondřej Vozár představil svou metodu vícekritériálního hodnocení technik znáhodněného dotazování pro populační průměr.

Alespoň na část setkání přišlo celkem 34 účastníků, z nichž bylo i několik studentů. Setkání probíhalo jako vždy v přátelské atmosféře a vedlo k řadě příjemných nestatistických interakcí... Jako jeden z organizátorů bych rád poděkoval nejen všem řečníkům, ale ocenil bych zejména to, že dorazila řada lidí nejen z jiných pražských institucí, ale také mimopražských. Doufám, že toho v hektické adventní době, kdy je semestr v plném proudu, nelitovali.



8. Další činnost

- Byla vydána čtyři řádná čísla Informačního bulletinu ČStS a jedno číslo mimořádné.
- Byla pravidelně aktualizována webová stránka společnosti – bylo zveřejněno celkem 18 příspěvků v sekci novinky a byly provedeny úpravy na dalších stránkách.
- Předseda společnosti a další členové společnosti reprezentovali ČStS na konferenci Probatat konané ve dnech 20. – 24. května v Smolenicích. Předseda společnosti a další členové reprezentovali ČStS na konferenci České demografické společnosti, která se konala ve dnech 22. – 24. května v Olomouci. Tomáš Hlavsa reprezentoval ČStS na 22. slovenské statistické a demografické konferenci konané ve dnech 19. – 20. září v Nitře.

9. Akce chystané v roce 2025

- Členská schůze ČStS v Praze, 30. ledna 2025.
- **STAKAN 2025: Pavlov 30. května – 1. června 2025.**
- Spoluorganizace 13. ročníku konference OSSConf (Otvorený softvér vo vzdelávaní, výskume a v IT riešeníach) v Žilině, 1. – 3. července 2025 (<https://ossconf.soit.sk/>).
- Spoluorganizace Rakouských statistických dní v Linzi, 2. – 4. září 2025.
- Mikuklášský den ČStS v Praze, kolem 6. prosince 2025.
- Robust 2026 v Srní, 18. – 23. ledna 2026.

V Prostějově dne 29. ledna 2025

Ondřej Vencálek
předseda ČStS

NĚKOLIK POZNÁMEK K ZÁVISLOSTI NÁHODNÝCH JEVŮ

A FEW NOTES ON THE DEPENDENCE OF RANDOM EVENTS

Zdeněk Karpíšek, Tomáš Pospíšil

Adresa: Odbor statistiky a optimalizace, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno

E-mail: karpisek@fme.vutbr.cz, tomin.pos@seznam.cz

Abstrakt: Příspěvek je zaměřený na popis charakteristik závislosti náhodných jevů, kterými jsou jejich koeficienty korelace a regrese a další míry kompatibility. Jde o pojmy, se kterými se posluchač základního kurzu z teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky takřka jistě nepotká a které nejsou ani v převážné většině učebnic. Jedná se přitom o míry závislosti náhodných jevů, které se snadno počítají a mají zajímavé vlastnosti. Navíc mohou nalézt uplatnění v inferenčních statistických metodách, když pravděpodobnosti náhodných jevů odhadneme pomocí pozorovaných relativních četností jejich nastoupení.

Klíčová slova: náhodné jevy, Bernštejnovy charakteristiky závislosti, odhady rozdělení pravděpodobnosti, Monte Carlo simulace.

Abstract: The paper is focused on the description of the characteristics of the dependence of random events, which are their correlation and regression coefficients and other measures of compatibility. These are terms that a student of a basic course in probability theory and mathematical statistics will almost certainly not encounter and which are not even in the vast majority of textbooks. These are measures of dependence of random phenomena that are easy to calculate and have interesting properties. In addition, they can find application in inferential statistical methods, when the probabilities of random events are estimated using the observed relative frequencies of their occurrence.

Keywords: random events, Bernštejn's characteristics of dependence, estimates of probability distribution, Monte Carlo simulation.

1. Úvod

Charakteristiky závislosti náhodných jevů, kterými se v tomto článku zabýváme, vychází jednak z pojmů korelace a regrese náhodných veličin a dále

Poděkování: Těchto výsledků bylo dosaženo v rámci specifického výzkumu FSI-S-23-8161 „Pokročilé matematické metody pro řešení úloh v inženýrství“ Fakulty strojního inženýrství Vysokého učení technického v Brně.

Literatura

- [1] Agresti, A. *Categorical Data Analysis*. 3rd ed., Hoboken: John Wiley and Sons, 2013, ISBN 978-0-470-46363-5. *cit. 12, 22*
- [2] Anděl, J. *Základy matematické statistiky*. 3. vyd. Praha: Matfyzpress, 2011. ISBN 978-80-7378-162-0. *cit. 11, 12 a 22*
- [3] Bernštejn, S. N. *Teoriya veroyatnostej*. Moskva, Leningrad: Gosudarstvennoje izdatel'stvo, 1927, 367 s. *cit. 7, 9, 10, 11 a 13*
- [4] Bohlmann, G. In *Lebensversicherungsmathematik, Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Bd I, Teil 2, Artikel ID4b 1900, s. 852–917. *cit. 7*
- [5] Glivenko, V. I. *Theorie pravděpodobnosti*. Praha: Přírodovědné nakladatelství JČMF, 1950, 248 s., (překlad ruského originálu Kurs teorii veroyatnostej, 1934). *cit. 7, 9, 10 a 11*
- [6] Kolmogorov, A. N. *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Berlin: Springer, 1933. *cit. 7*
- [7] Krengel, U. On the Contributions of Georg Bohlmann to Probability Theory. *Electronic Journal for History of Probability and Statistics* [online], 2011, 14 s. [cit. 2024-04-30]. URL: <http://www.jehps.net/>, <http://www.emis.de/journals/JEHPS/juin2011/Krengel.pdf>. *cit. 7*
- [8] Mantel, N. Chi-square tests with one degree of freedom: Extensions of the Mantel-Haenszel procedure. *J. A. Stat. Assoc.* 58, 1963, s. 690–700. *cit. 22*
- [9] Rényi, A. *Teorie pravděpodobnosti*. Praha: Academia, 1972, 512 s. *cit. 7, 11*
- [10] Yule, G. U. On the Association of Attributes in Statistics. *Phil. Trans. Roy. Soc., Series A*, vol. 194, 1900, pp. 257–319. *cit. 12*

Na závěr tohoto oddílu zdůrazníme, že fitovaná rozdělení pravděpodobnosti charakteristik závislosti náhodných jevů jsou poplatná volbě v našem případě aplikovaného maximálně entropického rovnoměrného rozdělení pro simulaci hodnot charakteristik metodou Monte Carlo. Jinak řečeno, tato rozdělení jsou odvislá od zvolené pravděpodobnostní míry (tj. pravděpodobnosti, pravděpodobnostní funkce nebo hustoty pravděpodobnosti) a obecně také od zvoleného borelovského jevového pole. Volba různých pravděpodobnostních měr pak povede k různým rozdělením pravděpodobnosti Bernštejnových charakteristik závislosti náhodných jevů.

4. Závěr

Popsané Bernštejnovy charakteristiky závislosti náhodných jevů jsou nesporně zajímavé svým pojetím a prokazují velký autorův důvtip, pokud je nevymyslel již někdo jiný před ním. To se ale v matematice občas stává. Jak již bylo na závěr předcházejícího oddílu řečeno, tyto charakteristiky budou mít pro jiná simulovaná rozdělení jejich hodnot jiná rozdělení pravděpodobnosti nežli ta, ke kterým jsme my dospěli. Jejich číselné vlastnosti popsané v Oddílu 2 ale na rozdělení pravděpodobnosti pozorovaných náhodných jevů A, B nezávisí, takže poskytují užitečné kvalitativní informace pro posouzení závislosti náhodných jevů. Zdůrazníme, že tyto charakteristiky jsou zaměřené na vyjádření míry závislosti náhodných jevů A, B a ne na vyjádření míry jejich „vzdálenosti“ nebo incidence.

Výsledky uvedené v Oddílu 3 byly získány pravděpodobnostním modelováním. V návaznosti na tyto výsledky jsme rozpracovali a simulovali opět metodou Monte Carlo chování statistických odhadů uvedených charakteristik, které vychází přímo z pozorovaných absolutních četností nastoupení náhodných jevů $A, B, A \cap B$ a nikoliv z pravděpodobností těchto náhodných jevů. Pro testování nezávislosti náhodných jevů A, B z pozorovaných četností aplikujeme Mantelovu statistiku M^2 [1, 8], statistiku χ^2 a logaritmickou interakci pro čtyřpolní kontingenční tabulku [1, 2]. První výsledky testů jsou dosti překvapivé, neboť i pro různě velké náhodné výběry zhruba 2/3 hodnot pozorovaných četností v každém výběru odpovídá nezávislosti náhodných jevů A, B .

Další oblastí našeho zájmu je zjišťování počtů dvojic nezávislých náhodných jevů u vybraných uniformních diskrétních rozdělení pravděpodobnosti. A začali jsme se zabývat charakterizací vícenásobné míry závislosti skupiny náhodných jevů pomocí koeficientu korelace více náhodných jevů vzhledem k jejich binárním Bernštejnovým koeficientům korelace.

pak z měr asociace kategoriálních veličin. V literatuře se uvádí, že definici nezávislých náhodných jevů tak, jak ji známe a používáme, zavedl podle A. N. Kolmogorova až ve dvacátých letech dvacátého století matematik S. N. Bernštejn. Podle článku [7] byl prvním autorem axiomatické definice pravděpodobnosti i nezávislosti náhodných jevů G. Bohlmann, který tyto pojmy uvádí ve své statí [4] už v roce 1900. Zde ovšem není náhodný jev prvkem borelovského jevového pole jako u A. N. Kolmogorova, ale je vymezen pouze slovně a citujeme: „pravděpodobnost nastoupení jevu E je kladný pravý zlomek $p(E)$ spojený s E “. Ostatní definice a axiomy jsou blízké pozdějšímu Kolmogorovu pojetí [6] z roku 1933 a nezávislost náhodných jevů je definována rovněž pomocí podmíněné pravděpodobnosti.

Náš zájem o míry závislosti dvojic náhodných jevů vzbudily informace z několika stránek znamenité knihy V. I. Glivenka [5], kde bohužel není žádný odkaz, ale dostali jsme se až k učebnici S. N. Bernštejna [3] z roku 1927. V této knize jsme však nenašli žádné další odkazy na literární zdroje, a proto prezentujeme odtud převzaté charakteristiky závislosti náhodných jevů jako charakteristiky Bernštejnovy. Chování těchto charakteristik v závislosti na velikosti pravděpodobností dvou náhodných jevů a pravděpodobnosti jejich průniku jsme simulovali metodou Monte Carlo.

2. Charakteristiky závislosti dvou náhodných jevů

V dalším předpokládáme, že je dán [9] pravděpodobnostní prostor (Ω, P, Σ) , kde Ω značí základní prostor, P pravděpodobnost a Σ borelovské jevové pole na Ω . Náhodné jevy $A, B \in \Sigma$ jsou **nezávislé**, jestliže $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ nebo $P(A) = 0; 1$, resp. $P(B) = 0; 1$. Případy, kdy aspoň jedna pravděpodobnost $P(A), P(B)$ má hodnotu 0 nebo 1 ze svých úvah o nezávislosti náhodných jevů A, B bez újmy na obecnosti vynecháme. Připomeňme, že když $P(A), P(B) \neq 0$, pak náhodné jevy A, B jsou nezávislé, právě když pro podmíněné pravděpodobnosti je $P(A|B) = P(A)$, resp. $P(B|A) = P(B)$.

Bernštejn v [3] definuje následující číselné charakteristiky závislosti náhodných jevů. Jejich označení jsme mírně „zmodernizovali“ oproti originálům uvedených v [3] a částečně i [5].

1. **Koeficient koherence** (ruský originál *koefficient sovместимости*) náhodných jevů A, B je definován vzorcem

$$\lambda(A, B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)P(B)}$$

a nabývá libovolných nezáporných hodnot. Hodnota $\lambda(A, B) = 1$ odpovídá nezávislosti náhodných jevů A, B a ostatní hodnoty popisují

úroveň jejich závislosti. Hodnota $\lambda(A, B) < 1$ vyjadřuje to, že při nastoupení jednoho jevu se zmenší pravděpodobnost nastoupení druhého jevu; speciálně pro disjunktní jevy je $\lambda(A, B) = 0$, naopak hodnota $\lambda(A, B) > 1$ vyjadřuje skutečnost, že při nastoupení jednoho jevu se zvětší pravděpodobnost nastoupení druhého jevu. Z vlastností koeficientu koherence uvádíme, že

$$\frac{P(A|B)}{P(A)} = \frac{P(B|A)}{P(B)} = \lambda(A, B).$$

2. **Koeficient kompatibility** (ruský originál *svjaz*) náhodných jevů A, B je definován vzorcem

$$\delta(A, B) = P(A \cap B) - P(A)P(B)$$

a dá se dokázat, že nabývá hodnot z intervalu $[-0,25; 0,25]$. Náhodné jevy A, B jsou nezávislé, právě když $\delta(A, B) = 0$. Ostatní hodnoty popisují úroveň a charakter („směr“) závislosti náhodných jevů A, B . Hodnota $\delta(A, B) < 0$ vyjadřuje to, že při nastoupení jednoho jevu se zmenší pravděpodobnost nastoupení druhého jevu, naopak hodnota $\delta(A, B) > 0$ odpovídá tomu, že při nastoupení jednoho jevu se zvětší pravděpodobnost nastoupení druhého jevu. Koeficient kompatibility má řadu zajímavých vlastností, např. platí:

$$\begin{aligned} \delta(A, B) &= P(A) [P(B|A) - P(B)] = P(B) [P(A|B) - P(A)] \\ &= \begin{vmatrix} P(A \cap B) & P(\bar{A} \cap B) \\ P(A \cap \bar{B}) & P(\bar{A} \cap \bar{B}) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

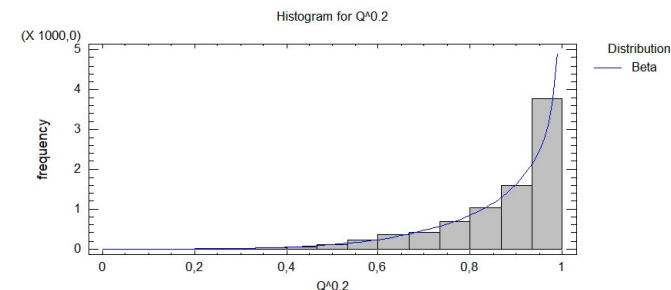
3. **Koeficient korelace** náhodných jevů A, B je definován vzorcem

$$\rho(A, B) = \frac{\delta(A, B)}{\sqrt{P(A)P(\bar{A})P(B)P(\bar{B})}}$$

a nabývá hodnot z intervalu $[-1; 1]$. Zřejmě je

$$\rho(A, B) = \frac{P(A \cap B) - P(A)P(B)}{\sqrt{P(A)(1 - P(A))P(B)(1 - P(B))}}.$$

Koeficient korelace náhodných jevů je významná a inspirativní charakteristika míry závislosti těchto jevů a má stejné vlastnosti jako koeficient asociace $\delta(A, B)$. Náhodné jevy A, B jsou nezávislé, právě když

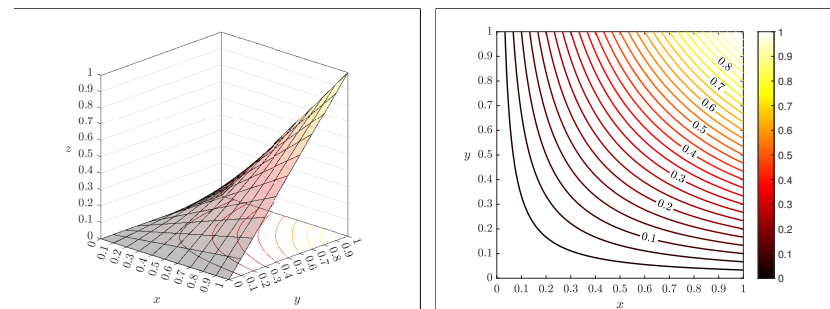


Obrázek 10: Hustota rozdělení veličiny $Q^* = |Q(A, B)|^{0,2}$.

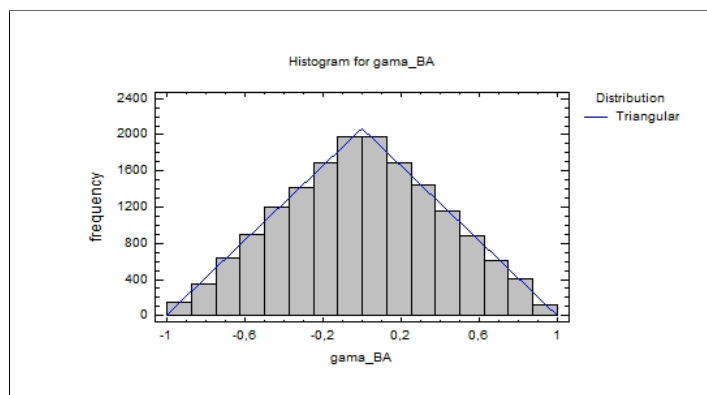
Beta rozdělení veličiny $Q^* = |Q(A, B)|^{0,2}$

Odhady parametrů: tvar 1 = -4,62199,
tvar 2 = 0,6702,

Testové kritérium: $\chi^2 = 119,768$; 97 stupňů volnosti
 P -hodnota = 0,0583414



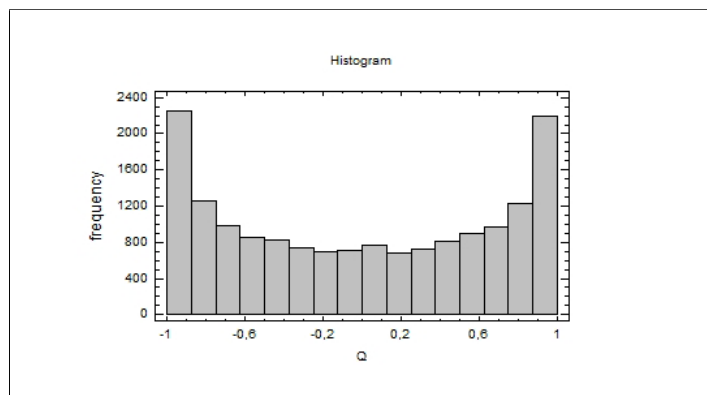
Obrázek 11: Graf a vrstevnice plochy $z = xy$.

Obrázek 8: Regresní koeficient $\gamma_A(B)$.

Trojúhelníkové rozdělení $\gamma_A(B)$

Odhady parametrů: dolní hranice = -1,00549,
střed = -0,000760525,
horní hranice = 1,00042

Testové kritérium: $\chi^2 = 110,524$; 96 stupňů volnosti
 P -hodnota = 0,147524

Obrázek 9: Histogram koeficientu asociace $Q(A, B)$.

$\rho(A, B) = 0$ a ostatní hodnoty popisují úroveň a charakter jejich závislosti. Hodnota $\rho(A, B) < 0$ vyjadřuje to, že při nastoupení jednoho jevu se zmenší pravděpodobnost nastoupení druhého jevu, naopak hodnota $\rho(A, B) > 0$ odpovídá tomu, že při nastoupení jednoho jevu se zvětší pravděpodobnost nastoupení druhého jevu. Poznamenejme, že koeficient korelace náhodných jevů uvádí i Glivenko v [5]. Platí [3, 5], že

$$\rho(A, B) = -\rho(\bar{A}, B) = -\rho(A, \bar{B}) = \rho(\bar{A}, \bar{B})$$

a také např.

$$\begin{aligned} \rho(A, B) &= [P(A|B) - P(A)] \sqrt{\frac{P(B)}{P(A)P(\bar{A})P(\bar{B})}} \\ &= [P(B|A) - P(B)] \sqrt{\frac{P(A)}{P(\bar{A})P(B)P(\bar{B})}}. \end{aligned}$$

Koeficient korelace $\rho(A, B) = 1$, právě když $P(A) = P(B) = P(A \cap B)$ a $\rho(A, B) = -1$, právě když $P(A) = P(\bar{B}) = P(A \cap \bar{B})$. Přidejme ještě další zajímavé vlastnosti, které nejsou v [3, 5]:

a) Jestliže jsou náhodné jevy A, B disjunktní, tj. $A \cap B = \emptyset$, pak

$$\rho(A, B) = -\sqrt{\frac{P(A)P(B)}{P(\bar{A})P(\bar{B})}} < 0.$$

b) Jestliže nastoupení náhodného jevu A má za následek nastoupení náhodného jevu B , tj. $A \subseteq B$, pak

$$\rho(A, B) = \sqrt{\frac{P(A)P(\bar{B})}{P(\bar{A})P(B)}} > 0.$$

4. **Regresní koeficient** náhodného jevu A vzhledem k náhodnému jevu B je dán vzorcem

$$\gamma_B(A) = P(A|B) - P(A|\bar{B}) = \frac{\delta(A, B)}{P(B)P(\bar{B})}.$$

Analogicky definujeme regresní koeficient náhodného jevu B vzhledem k náhodnému jevu A

$$\gamma_A(B) = P(B|A) - P(B|\bar{A}) = \frac{\delta(A, B)}{P(A)P(\bar{A})}.$$

Oba regresní koeficienty mají co do hodnot a znaménka stejné vlastnosti jako koeficient asociace $\delta(A, B)$ a dá se dokázat, že nabývají hodnot z intervalu $[-1; 1]$. Poznamenejme, že regresní koeficienty náhodných jevů uvádí i Glivenko v [5]. Regresní koeficienty $\gamma_B(A)$ a $\gamma_A(B)$ se obecně nerovnají, ale $\gamma_B(A) = \gamma_A(B)$, právě když $P(A) = P(B)$, anebo $P(A) = P(\bar{B})$. Platí, že

$$\text{sgn}(\gamma_B(A)) = \text{sgn}(\gamma_A(B)) = \text{sgn}(\rho(A, B)),$$

$$\rho(A, B) = \gamma_B(A) \sqrt{\frac{P(B)P(\bar{B})}{P(A)P(\bar{A})}} = \gamma_A(B) \sqrt{\frac{P(A)P(\bar{A})}{P(B)P(\bar{B})}},$$

$$\rho^2(A, B) = \gamma_B(A)\gamma_A(B).$$

5. **Koeficient asociace** (ruský originál *koefficient svjazi*) mezi náhodnými jevy A, B je definován vzorcem

$$Q(A, B) = \frac{\delta(A, B)}{P(A \cap B)P(\bar{A} \cap \bar{B}) + P(A \cap \bar{B})P(\bar{A} \cap B)}.$$

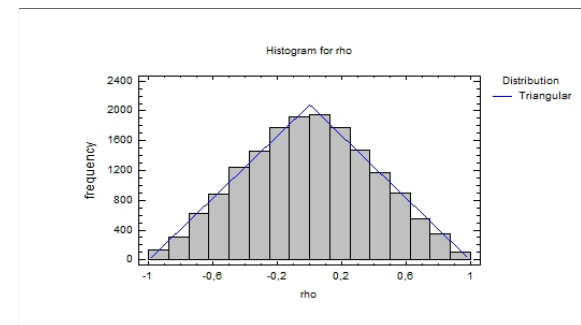
Koeficient asociace má co do hodnot a znaménka stejné vlastnosti jako koeficient kompatibility a koeficient korelace a nabývá hodnot z intervalu $[-1; 1]$. Z více vztahů z [3] uvádíme bez důkazu či odvození některé zajímavé a významné. Platí, že

$$\text{sgn}(Q(A, B)) = \text{sgn}(\rho(A, B)) = \text{sgn}(\gamma_B(A)) = \text{sgn}(\gamma_A(B)),$$

$$|Q(A, B)| \geq |\rho(A, B)|, \quad |Q(A, B)| \geq |\gamma_B(A)|, \quad |Q(A, B)| \geq |\gamma_A(B)|,$$

$$\begin{aligned} Q(A, B) &= \frac{\gamma_B(A)}{1 - [P(A|B)P(A|\bar{B}) + P(\bar{A}|B)P(\bar{A}|\bar{B})]} \\ &= \frac{\gamma_A(B)}{1 - [P(B|A)P(B|\bar{A}) + P(\bar{B}|A)P(\bar{B}|\bar{A})]}. \end{aligned}$$

Charakteristiky koeficient koherence $\lambda(A, B)$, koeficient kompatibility $\delta(A, B)$, koeficient korelace $\rho(A, B)$ a koeficient asociace $Q(A, B)$ jsou vzhledem k náhodným jevům A, B symetrické, avšak regresní koeficienty $\gamma_B(A)$ a $\gamma_A(B)$ symetrické nejsou. Důležitou vlastností charakteristik je jejich citlivost a současně schopnost vyjádření míry závislosti náhodných jevů A, B . Podle Bernštejna [3] je z tohoto pohledu nejlepší koeficient asociace $Q(A, B)$.

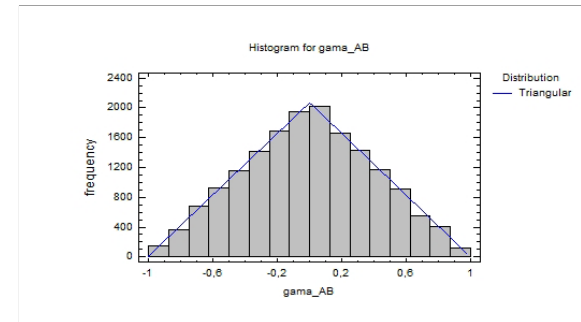


Obrázek 6: Koeficient korelace $\rho(A, B)$.

Trojúhelníkové rozdělení $\rho(A, B)$

Odhady parametrů: dolní hranice = $-0,997904$,
střed = $0,00129298$,
horní hranice = $0,996505$

Testové kritérium: $\chi^2 = 118,292$; 96 stupňů volnosti
 P -hodnota = $0,0610394$

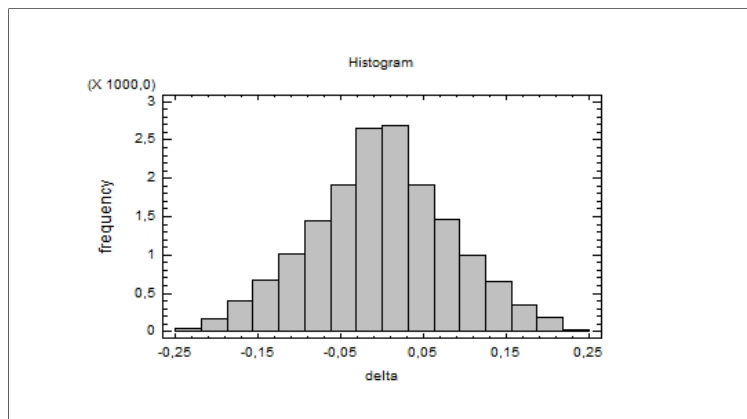
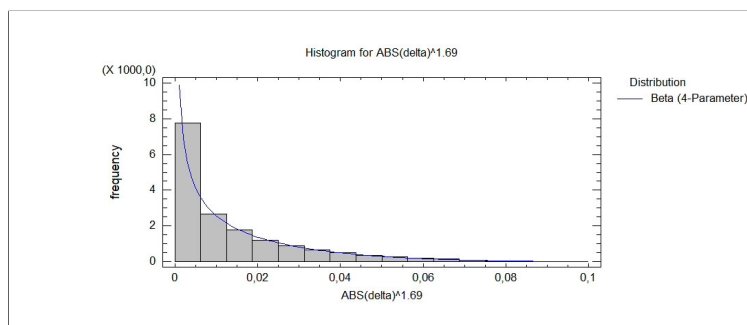


Obrázek 7: Regresní koeficient $\gamma_B(A)$.

Trojúhelníkové rozdělení $\gamma_B(A)$

Odhady parametrů: dolní hranice = $-1,00537$,
střed = $0,00131044$,
horní hranice = $0,999346$

Testové kritérium: $\chi^2 = 99,6847$; 96 stupňů volnosti
 P -hodnota = $0,378061$

Obrázek 4: Histogram koeficientu kompatibility $\delta(A, B)$.Obrázek 5: Hustota rozdělení veličiny $\delta^*(A, B) = |\delta(A, B)|^{1,69}$.

Beta rozdělení se čtyřmi parametry veličiny $\delta^(A, B) = |\delta(A, B)|^{1,69}$*
 Odhady parametrů: tvar 1 = 0,521186, tvar 2 = 4,22038,
 práh 1 (spec.) = 0,0,
 práh 2 (spec.) = 0,125
 Testové kritérium: $\chi^2 = 107,476$; 97 stupňů volnosti
 P -hodnota = 0,21943

Bernštejn [3] ani Glivenko [5] neuvádí motivace definic koeficientu korelace $\rho(A, B)$ a regresních koeficientů $\gamma_B(A), \gamma_A(B)$. Tyto motivace lze vyvodit z definic koeficientu korelace a regresních koeficientů složek dvourozměrného diskretního náhodného vektoru (X, Y) . Předpokládejme, že složky tohoto vektoru nabývají hodnoty 0 a 1 a vektor má pravděpodobnostní funkci $p(x, y)$ v následující tabulce:

X	Y		
	1	0	Σ
1	p_{11}	p_{12}	$p_{1\bullet}$
0	p_{21}	p_{22}	$1 - p_{1\bullet}$
Σ	$p_{\bullet 1}$	$1 - p_{\bullet 1}$	1

Číselné charakteristiky našeho náhodného vektoru jsou [9]:

- střední hodnota $E(X) = p_{1\bullet} \cdot 1 + (1 - p_{1\bullet}) \cdot 0 = p_{1\bullet}$ a podobně $E(Y) = p_{\bullet 1}$,
- rozptyl $\sigma^2(X) = p_{1\bullet} \cdot 1^2 + (1 - p_{1\bullet}) \cdot 0^2 - p_{1\bullet}^2 = p_{1\bullet} - p_{1\bullet}^2$ a podobně $\sigma^2(Y) = p_{\bullet 1} - p_{\bullet 1}^2$,
- kovariance $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = p_{11} \cdot 1 + p_{12} \cdot 0 + p_{21} \cdot 0 + p_{22} \cdot 0 - p_{1\bullet} p_{\bullet 1} = p_{11} - p_{1\bullet} p_{\bullet 1}$,
- koeficient korelace

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \dots = \frac{p_{11} - p_{1\bullet} p_{\bullet 1}}{\sqrt{p_{1\bullet} (1 - p_{1\bullet}) p_{\bullet 1} (1 - p_{\bullet 1})}}.$$

Koeficient regrese náhodné veličiny X vzhledem k náhodné veličině Y je směrnice regresní přímky, jejíž rovnice [2] je $(x - E(X)) = \gamma_Y(X)(y - E(Y))$ a pro náš náhodný vektor je $\gamma_Y(X) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma^2(Y)} = \frac{p_{11} - p_{1\bullet} p_{\bullet 1}}{p_{\bullet 1} (1 - p_{\bullet 1})}$. Podobně koeficient regrese náhodné veličiny Y vzhledem k náhodné veličině X je $\gamma_X(Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma^2(X)} = \frac{p_{11} - p_{1\bullet} p_{\bullet 1}}{p_{1\bullet} (1 - p_{1\bullet})}$.

Jestliže přiřadíme nastoupení:

- náhodného jevu A hodnotu náhodné veličiny $X = 1$,
- opačného náhodného jevu $\bar{A}$ hodnotu náhodné veličiny $X = 0$,

- náhodného jevu B hodnotu náhodné veličiny $Y = 1$,
- opačného náhodného jevu $\bar{B}$ hodnotu náhodné veličiny $Y = 0$,
- náhodného jevu $A \cap B$ hodnotu náhodného vektoru $(X, Y) = (1; 1)$,
- náhodného jevu $A \cap \bar{B}$ hodnotu náhodného vektoru $(X, Y) = (1; 0)$,
- náhodného jevu $\bar{A} \cap B$ hodnotu náhodného vektoru $(X, Y) = (0; 1)$,
- náhodného jevu $\bar{A} \cap \bar{B}$ hodnotu náhodného vektoru $(X, Y) = (0; 0)$,

obdržíme z tabulky s pravděpodobnostní funkcí náhodného vektoru (X, Y) pravděpodobnosti

$$P(A) = p_{1\bullet}, \quad P(\bar{A}) = 1 - p_{1\bullet}, \quad P(B) = p_{\bullet 1}, \quad P(\bar{B}) = 1 - p_{\bullet 1}, \quad P(A \cap B) = p_{11}.$$

Ze známého vzorce [2] pro koeficient korelace náhodného vektoru $\rho(X, Y)$ potom dostaneme definiční vzorec pro koeficient korelace $\rho(A, B)$ náhodných jevů A, B a podobně ze vzorců [2] pro regresní koeficienty $\gamma_Y(X)$ a $\gamma_X(Y)$ získáme definiční vzorce pro regresní koeficienty $\gamma_B(A)$ a $\gamma_A(B)$ náhodných jevů A, B . Pro koeficient asociace $Q(A, B)$ se nám podobný motivační vzorec najít nepodařilo, ale řadou rešerší jsme zjistili, že tento koeficient uvádí již v roce 1900 G. U. Yule [10]. Domníváme se, že tento koeficient je založen na tzv. **poměru šancí** nastoupení náhodných jevů A, B

$$\theta = \frac{P(A)/P(\bar{A})}{P(B)/P(\bar{B})},$$

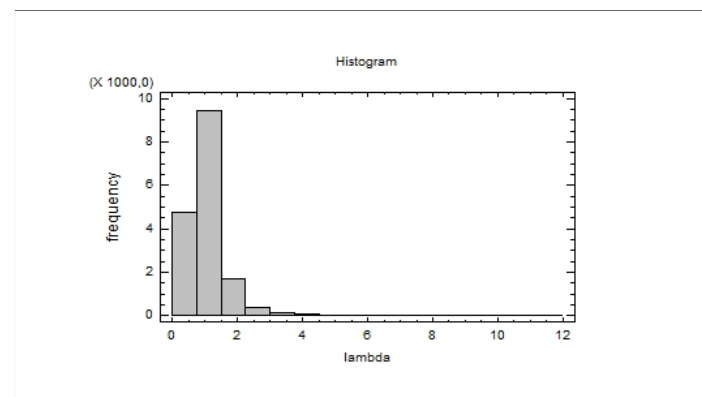
který lze také vyjádřit ve tvaru [1, 2]

$$\theta = \frac{P(A \cap B)P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(A \cap \bar{B})P(\bar{A} \cap B)}.$$

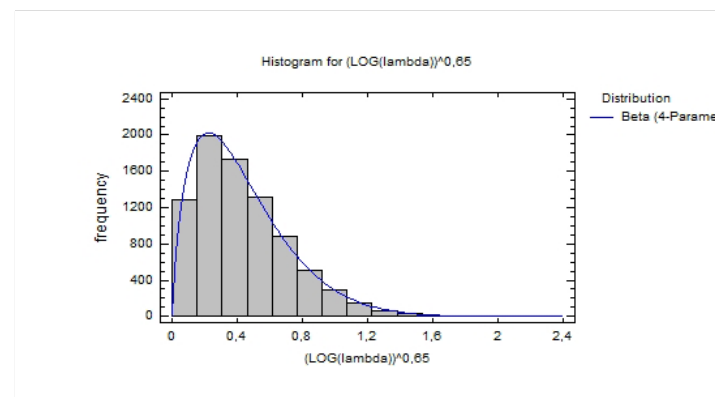
Platí, že $\theta \in [0; \infty]$, přičemž hodnota $\theta < 1$ odpovídá negativní závislosti a hodnota $\theta > 1$ pozitivní závislosti náhodných jevů A, B . Dále je $\theta = 1$, právě když jsou náhodné jevy A, B nezávislé. Snadno lze dokázat, že koeficient asociace je pak

$$Q = \frac{\theta - 1}{\theta + 1}.$$

Platí, že $Q \in [-1; 1]$, přičemž hodnota $Q < 0$ odpovídá negativní závislosti a hodnota $Q > 0$ pozitivní závislosti náhodných jevů A, B . Dále je $Q = 0$, právě když jsou náhodné jevy A, B nezávislé. Označení koeficientu asociace



Obrázek 2: Histogram koeficientu koherence $\lambda(A, B)$.



Obrázek 3: Hustota rozdělení veličiny $\lambda^*(A, B) = |\log \lambda(A, B)|^{0.65}$.

Beta rozdělení se čtyřmi parametry veličiny $\lambda^(A, B) = |\log \lambda(A, B)|^{0.65}$*

Odhady parametrů: tvar 1 = 1,7677, tvar 2 = 11,1031
práh 1 = 0,0000
práh 2 = 3,1671

Testové kritérium: $\chi^2 = 102,894$; 95 stupňů volnosti
P-hodnota = 0,272385

Připomeňme, že každá z výše uvedených Bernšteinových charakteristik $\lambda(A, B)$, $\delta(A, B)$, $\rho(A, B)$, $\gamma_B(A)$, $\gamma_A(B)$, $Q(A, B)$ je funkcí proměnných $P(A)$, $P(B)$ a $P(A \cap B)$. Pro soubory simulovaných hodnot těchto charakteristik jsme našli následující spojitá rozdělení pravděpodobnosti, jejichž vhodnost jsme testovali více testy dobré shody. Fitování rozdělení a testy jsme provedli pomocí profesionálního statistického softwaru STATGRAPHICS Centurion XV. Spočítali jsme také obvyklé popisné statistiky, ale uvádíme pouze výsledky χ^2 -testů se stejně pravděpodobnými třídami, ale aplikovali jsme také tyto testy: modifikovaný Kolmogorovův-Smirnovův, Kuiperův V, Cramerův-von Misesův W^2 , Watsonův U^2 a Andersonův-Darlingův A^2 . Získané výsledky fitování a χ^2 -testy jsou v komentářích u následujících obrázků.

Fitování rozdělení pravděpodobnosti koeficientu koherence $\lambda(A, B)$ nebylo snadné. Histogram simulací koeficientu koherence je na Obrázku 2. Po řadě výpočtů se nám ale podařilo najít rozdělení náhodné veličiny $\lambda^*(A, B) = |\log \lambda(A, B)|^{0,65}$. Hustota jejího rozdělení je na Obrázku 3, u něhož jsou také číselné výsledky. Zde a dále značí $\log$ a LOG přirozený logaritmus.

Fitování rozdělení pravděpodobnosti koeficientu kompatibility $\delta(A, B)$ nebylo zcela rutinní. Protože jde zřejmě o rozdělení symetrické vzhledem ke střední hodnotě 0 (viz Obrázek 4), podařilo se najít rozdělení pro veličinu $\delta^*(A, B) = |\delta(A, B)|^{1,69}$. Hustota jejího rozdělení je na Obrázku 5, u něhož jsou také číselné výsledky.

Fitování rozdělení pravděpodobnosti koeficientu asociace $Q(A, B)$ rovněž nebylo triviální. Protože jde zřejmě o rozdělení symetrické vzhledem ke střední hodnotě 0 (viz Obrázek 9), podařilo se najít rozdělení veličiny $Q^* = |Q(A, B)|^{0,2}$. Hustota jejího rozdělení je na Obrázku 10, u něhož jsou také číselné výsledky.

Na Obrázku 11 je graf plochy $z = xy$ a jejích vrstevnic. Souřadnice bodů na této ploše $x = P(A)$, $y = P(B)$ a $z = P(A \cap B)$ odpovídají případům, kdy jsou náhodné jevy A, B nezávislé. Triviální případy, kdy aspoň jedna pravděpodobnost $P(A)$, $P(B)$ je 0 anebo 1, což zaručuje, že i tyto náhodné jevy A, B jsou nezávislé, jsme bez újmy na obecnosti již na počátku Oddílu 2 vynechali. Těmto případům odpovídá graficky čtverec $[0; 1]^2$ a izolovaný bod $(1; 1)$. Množina všech bodů tvořících plochu s rovnicí $z = xy$ je podmnožinou množiny přípustných bodů tvořících těleso M a je pocho-pitelně výrazně „menší“ než toto těleso. Zdánlivě proti tomu stojí modusy fitovaných rozdělení pravděpodobnosti unimodálních charakteristik $\lambda(A, B)$, $\delta(A, B)$, $\rho(A, B)$, $\gamma_B(A)$, $\gamma_A(B)$ a také bimodální charakteristika $Q(A, B)$, která má rozdělení pravděpodobnosti typu U. To je ale pro jakékoli hodnoty a tím také i pro modus, spojitých náhodných veličin běžná vlastnost.

písmenem Q údajně zvolil Youle na počest svého přítele, belgického statistika a astronoma A. Queteleta.

Všechny charakteristiky závislosti náhodných jevů A, B jsou jenom funkcemi $P(A)$, $P(B)$ a $P(A \cap B)$. Hodnoty pravděpodobností $P(A \cap \bar{B})$, $P(\bar{A} \cap B)$ a $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ potřebné pro výpočet koeficientu asociace můžeme snadno určit pomocí $P(A)$, $P(B)$ a $P(A \cap B)$ z výše uvedené tabulky s pravděpodobnostní funkcí $p(x, y)$ náhodného vektoru (X, Y) .

Následující příklad má spíše ilustrační a „školní“ charakter. Poznamenejme, že při zadávání pravděpodobností $P(A)$, $P(B)$ a $P(A \cap B)$ musíme nutně dodržet podmínky, které vyplývají ze základních vlastností pravděpodobnosti. Musí být

$$P(A \cap B) \leq P(A), \quad P(A \cap B) \leq P(B),$$

a protože je $P(A \cup B) \leq 1$, musí také být

$$P(A) + P(B) \leq 1 + P(A \cap B).$$

Pokud se ale jedná o pravděpodobnosti získané z rozdělení pravděpodobnosti nějaké náhodné veličiny, jsou tyto podmínky apriori splněné, jestliže náhodné jevy A, B a $A \cap B$ odpovídají uvažovaným množinám hodnot této náhodné veličiny.

Příklad. Pro ukázkou Bernšteinových charakteristik závislosti náhodných jevů A, B volíme hodnoty pravděpodobností $P(A)$, $P(B)$ a $P(A \cap B)$ uvedené v Tabulce 1. Vypočtené hodnoty charakteristik jsou uvedené v Tabulce 2.

Bernštein v [3] věnoval pozornost také posouzení, jak jednotlivé charakteristiky závislosti náhodných jevů tuto závislost vyjadřují a ilustruje jejich hodnoty na příkladech. Došel k názoru, že nejvíce efektivní je charakteristika $Q(A, B)$ a že ostatní charakteristiky samy o sobě závislost dostatečně nevyjadřují. To dokládají také vypočtené výsledky v tabulce v našem příkladu:

- hodnota $Q(A, B) = 1$ v řádcích #9, #10, #12 a #14 reflektuje „úplnou“ kladnou závislost náhodných jevů A, B , tj. $A \subset B$,
- hodnota $Q(A, B) = -1$ v řádcích #4, #5 a #6 signalizuje „úplnou“ zápornou závislost disjunktních náhodných jevů A, B , tj. $A \cap B = \emptyset$.

V tabulce výsledků je vidět, že ostatní charakteristiky takových „úplných“ závislostí tak striktní nejsou. Nezávislost náhodných jevů A, B však identifikují všechny charakteristiky zcela přesně. V případě podezřelých hodnot charakteristiky $Q(A, B) = -1$ na řádku #15 jde asi o obecnější vlastnost této charakteristiky, která má tendenci závislosti více zdůrazňovat. Dokládá to také její fitované rozdělení pravděpodobnosti, typ U – viz Obrázek 8 a 9.

Tabulka 1: Hodnoty pravděpodobností.

#	$P(A)$	$P(B)$	$P(A \cap B)$
1	0,3	0,4	0,12
2	0,5	0,6	0,30
3	0,7	0,9	0,63
4	0,3	0,4	0
5	0,3	0,7	0
6	0,3	0,6	0
7	0,3	0,6	0,1
8	0,3	0,6	0,2
9	0,3	0,6	0,3
10	0,4	0,6	0,4
11	0,6	0,7	0,4
12	0,6	0,7	0,6
13	0,3	0,4	0,2
14	0,5	0,5	0,5
15	0,8	0,9	0,7

3. Modelování charakteristik závislosti metodou Monte Carlo a jejich testy

V tomto oddílu věnujeme pozornost popisu Bernšteinových charakteristik z hlediska „hustoty“ jejich možných hodnot. K tomuto účelu jsme vytvořili dva simulační modely a aplikovali metodu Monte Carlo.

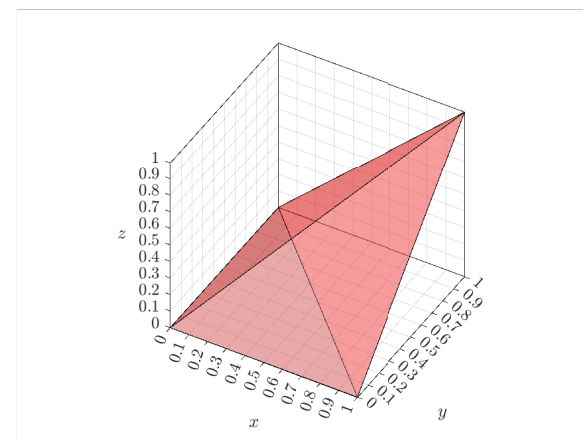
Model spočíval v generování pseudonáhodných hodnot rovnoměrného rozdělení $R(0;1)$ představující pravděpodobnosti $x = P(A)$, $y = P(B)$ a $z = P(A \cap B)$, tj. hodnot náhodného vektoru (X, Y, Z) s nezávislými složkami, který nabýval nezávislé trojice hodnot $(x_i, y_i, z_i) \in (0; 1)^3$, $i = 1, \dots, N$. Celkový počet generovaných trojic byl $N = 100000$. Z těchto trojic jsme vybrali pouze ty, které splňovaly (viz Oddíl 2) nerovnosti

$$z \leq x, \quad z \leq y \quad \text{a} \quad x + y \leq z + 1.$$

Těchto trojic bylo celkem $N = 16606$. Trojice (x_i, y_i, z_i) jsou vlastně souřadnice bodů ve čtyřtěnu na Obrázku 1, tj. přípustných bodů pro náš model. Označme tuto množinu M .

Tabulka 2: Vypočtené hodnoty charakteristik.

#	$\lambda(A, B)$	$\delta(A, B)$	$\rho(A, B)$	$\gamma_B(A)$	$\gamma_A(B)$	$Q(A, B)$
1	1	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0
3	1	0	0	0	0	0
4	0	-0,12	-0,53452	-0,5	-0,57143	-1
5	0	-0,21	-1	-1	-1	-1
6	0	-0,18	-0,80178	-0,75	-0,85714	-1
7	0,55556	-0,08	-0,35635	-0,33333	-0,38095	-0,66667
8	1,11111	0,02	-0,08909	0,08333	0,09524	0,2
9	1,66667	0,12	0,53452	0,5	0,57143	1
10	1,66667	0,16	0,66667	0,66667	0,66667	1
11	0,95238	-0,02	-0,08909	-0,09524	-0,08333	-0,2
12	1,42857	0,18	0,80178	0,85714	0,75	1
13	1,66667	0,08	0,35635	0,33333	0,38095	0,66667
14	2	0,25	1	1	1	1
15	0,97222	-0,02	-0,16667	-0,22222	-0,125	-1

Obrázek 1: Množina M přípustných bodů pro náš model.